



# Ein Transfer-Paradoxon bei besteuerten Matrixspielen

DIPLOMARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades  
Diplom-Mathematikerin

FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA  
Fakultät für Mathematik und Informatik

eingereicht von **Marlis Bärthel**

geb. am 08.05.1987 in Jena

Betreuer: Prof. Dr. Ingo Althöfer

Jena, 14. Februar 2012

# Abstract

In der nicht-kooperativen Spieltheorie definiert man den Wert  $\bar{v}$  eines Matrixspiels  $A$  über die erwartete Auszahlung des Zeilenspielers in einem Gleichgewicht  $(\bar{p}, \bar{q})$ :  $\bar{v} = \sum \sum \bar{p}_i \bar{q}_j a_{ij}$ . Wir betrachten statt dessen den **Erwarteten Transfer** des Spiels:  $ET(A; \bar{p}, \bar{q}) = \sum \sum \bar{p}_i \bar{q}_j |a_{ij}|$ . Analysiert wird die Frage, wie sich der Erwartete Transfer verändert, wenn der Gewinner eine Spielsteuer, prozentual zu seinem Gewinn, zahlen muss.

Paradoxerweise führt solch eine Steuer im Szenario „Winner Tax“ oft zu einem Zuwachs des Erwarteten Transfers. Gleiches gilt für die Modelle „Loser Tax“, „Bilateral Tax“, „Loser Bonus“, „Winner Bonus“ und „Bilateral Bonus“. Es gibt einen bemerkenswerten Zusammenhang zwischen den Szenarien „Winner Tax“ und „Loser Bonus“, zwischen „Loser Tax“ und „Winner Bonus“ sowie zwischen „Bilateral Tax“ und „Bilateral Bonus“. Die Ergebnisse könnten interessant sein für die Diskussion zur Einführung einer Finanztransaktions-Steuer oder auch im Bereich der Erhebung von Spiel- und Wettsteuern.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abstract</b>	<b>2</b>
<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>1. Theoretische Grundlagen aus der nicht-kooperativen Spieltheorie</b>	<b>8</b>
1.1. Grundlegende Begriffe und Definitionen . . . . .	8
1.1.1. Matrixspiele und Bimatrixspiele . . . . .	8
1.1.2. Gemischte Strategien und erwartete Auszahlung . . . . .	11
1.1.3. Nash-Gleichgewicht . . . . .	13
1.2. Bekannte Sätze und Eigenschaften . . . . .	14
1.2.1. Aussagen für Bimatrixspiele . . . . .	14
1.2.2. Aussagen für den Spezialfall von Matrixspielen . . . . .	18
<b>2. Modell zum Erwarteten Transfer</b>	<b>20</b>
2.1. Erwarteter Transfer in Matrixspielen . . . . .	20
2.2. Definition verschiedener unvorteilhafter und vorteilhafter Manipulations-Szenarien . . . . .	23
<b>3. Phänomene bezüglich des Erwarteten Transfers</b>	<b>25</b>
3.1. Resultate für $2 \times 2$ - Matrixspiele . . . . .	25
3.1.1. Beispielrechnung . . . . .	25
3.1.2. Theoreme und Beweise . . . . .	31
3.1.3. Bemerkungen, Gegenbeispiel und experimentelle Ergebnisse . . . . .	39
3.2. Resultate für $3 \times 3$ - Matrixspiele . . . . .	46
3.2.1. Beispielrechnung . . . . .	46
3.2.2. Theoreme und Beweise . . . . .	49
3.2.3. Bemerkungen, Gegenbeispiel und experimentelle Ergebnisse . . . . .	56
<b>4. Experimentelle Ergebnisse für Matrixspiele höherer Dimension</b>	<b>63</b>
4.1. Symmetrische Gegenbeispiele der Dimension 4 und 5 . . . . .	63
4.2. Experimentelle Ergebnisse für quadratische Matrixspiele der Dimension 4 und 5 . . . . .	67
4.2.1. Resultate für zufällige symmetrische $4 \times 4$ - und $5 \times 5$ - Matrixspiele . . . . .	68
4.2.2. Resultate für zufällige faire $4 \times 4$ - und $5 \times 5$ - Matrixspiele . . . . .	70
<b>5. Zusammenfassung, Diskussion und offene Fragen</b>	<b>74</b>

---

<b>A. Anhänge</b>	<b>77</b>
A.1. Anlagen zu Abschnitt 3.1 . . . . .	77
A.1.1. Ergebnistabellen für faire, nicht-degenerierte $2 \times 2$ - Matrixspiele mit gemischtem Gleichgewicht . . .	77
A.1.2. Monotonie-Beweise für $2 \times 2$ - Matrixspiele . . . . .	80
A.1.3. Tabelle für Gegenbeispiel . . . . .	81
A.1.4. Experimentelle Ergebnisse . . . . .	82
A.2. Anlagen zu Abschnitt 3.2 . . . . .	83
A.2.1. Ergebnistabellen für nicht-degenerierte, symmetrische $3 \times 3$ - Matrixspiele mit gemischtem Gleichgewicht . . .	83
A.2.2. Monotonie-Beweise für $3 \times 3$ - Matrixspiele . . . . .	86
A.2.3. Tabelle für Gegenbeispiel . . . . .	87
A.2.4. Experimentelle Ergebnisse . . . . .	88
A.3. Anlagen zu Kapitel 4 . . . . .	92
A.3.1. Tabellen für Gegenbeispiele . . . . .	92
A.3.2. Experimentelle Ergebnisse . . . . .	94
A.4. CD-Wegweiser zum Auffinden von digital beigefügten Quellcodes . . . . .	101
<b>Verzeichnis der Tabellen</b>	<b>103</b>
<b>Verzeichnis der Abbildungen</b>	<b>104</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>106</b>
<b>Danksagung</b>	<b>108</b>
<b>Selbstständigkeitserklärung</b>	<b>109</b>

# Einleitung

Gegeben sei ein Matrixspiel  $\Gamma = (A, -A)$  zwischen zwei Kontrahenten. Es seien  $p$  und  $q$  beliebige gemischte Strategien der beiden Spieler. Die **erwartete Auszahlung** ist als Begriff in der Literatur der nicht-kooperativen Spieltheorie fest verankert. Für den Zeilenspieler ergibt sie sich durch  $v_1(p, q) = \sum \sum p_i q_j a_{ij}$  und für den Spaltenspieler durch  $v_2(p, q) = \sum \sum p_i q_j (-a_{ij})$ . Man spricht von einem Gleichgewicht  $(\bar{p}, \bar{q})$ , wenn beide Spieler lokal zufrieden sind, d.h. wenn die Abweichung eines Spielers von seiner Gleichgewichts-Strategie ihm eine höchstens genauso gute erwartete Auszahlung verspricht. Seit JOHN VON NEUMANN [Neu 1928] ist bekannt, dass die erwarteten Auszahlungen in jedem Gleichgewicht gleich groß sind. Dies rechtfertigt die Definition eines Spielwertes  $\bar{v} = v_1(\bar{p}, \bar{q})$ , wobei  $(\bar{p}, \bar{q})$  ein beliebiges Gleichgewicht ist.

In gewissen Situationen könnte es nicht nur interessant sein, mit welcher Auszahlung jeder Spieler zu rechnen hat, sondern auch wie viele Einheiten hin oder her transferiert werden. Dazu führen wir für gemischte Strategien  $p$  und  $q$  eine neue Größe ein, den **Erwarteten Transfer**  $ET(\Gamma; p, q) := \sum \sum p_i q_j |a_{ij}|$ . Der Erwartete Transfer ist im Allgemeinen für verschiedene Gleichgewichte nicht gleich groß. Wir interessieren uns für den Fall, in dem das Matrixspiel genau ein Gleichgewicht  $(\bar{p}, \bar{q})$  besitzt und schreiben dann kurz  $ET(\Gamma) = ET(\Gamma; \bar{p}, \bar{q})$ .

Diese Diplomarbeit befasst sich mit der Frage, wie sich der Erwartete Transfer des Matrixspiels ändert, wenn die Auszahlungen der Spieler auf eine ganz bestimmte Art und Weise, zu deren Vorteil oder Nachteil, manipuliert werden.

Im Basismodell „Winner Tax“ nehmen wir an, dass der Gewinner eine Spielsteuer in Höhe eines prozentualen Anteils  $x$  seiner Auszahlung an eine dritte Instanz abgeben muss. Konkret: Spielt der Zeilenspieler Zeile  $i$  und der Spaltenspieler Spalte  $j$ , und beträgt der Steuersatz beispielsweise 10 % ( $x = 0.1$ ), so wird  $|a_{ij}|$  transferiert. Ist  $a_{ij} > 0$ , so hat der Zeilenspieler gewonnen. Der Spaltenspieler muss den kompletten Betrag  $a_{ij}$  zahlen. Der Zeilenspieler hingegen erhält nur eine Auszahlung von  $0.9 \cdot a_{ij}$ , weil er  $0.1 \cdot a_{ij}$  abgeben muss. Analog zahlt im Fall  $a_{ij} < 0$  der Zeilenspieler den vollen Betrag  $|a_{ij}|$ , während der Spaltenspieler nur  $0.9 \cdot |a_{ij}|$  ausgezahlt bekommt. Im Fall von  $a_{ij} = 0$  wird keine Einheit transferiert und es wird auch keine Steuerabgabe fällig.

Aus dem Ausgangsspiel  $\Gamma$  entsteht auf diese Art und Weise ein Bimatrixspiel  $\Gamma_{\text{WIT}}(x)$ . Auch hierfür ist es möglich, Gleichgewichts-Strategien zu berechnen. Grundlage bildet die Theorie der Nash-Gleichgewichte, benannt nach ihrem Entdecker JOHN NASH [Nas 1951]. Unter geeigneten Voraussetzungen hat das so entstandene Bimatrixspiel ebenfalls genau ein solches Gleichgewicht. Wir berechnen den Erwarteten Transfer des besteuerten Spiels mit Hilfe dieser optimalen Strategien.

Hat der Gewinner nur  $(1 - x) \cdot |a_{ij}|$  erhalten, während der Verlierer den vollen Betrag  $|a_{ij}|$  zahlen muss, so nehmen wir einen Transfer von  $|a_{ij}|$  an. Anschaulich ist unser Transfer somit ein „Transfer vor Steuerabgabe“.

Intuitiv hatten wir vermutet, dass solch eine Steuerabgabe die Spieler dazu bewegt, vorsichtiger zu spielen und der Erwartete Transfer dementsprechend geringer wird. Doch überraschenderweise ist das Gegenteil der Fall! Wir können dieses Transfer-Paradoxon für faire  $2 \times 2$  - und symmetrische  $3 \times 3$  - Matrixspiele (unter der Voraussetzung von Nicht-Degeneriertheit) beweisen: Der Erwartete Transfer ist stets größer als im Ausgangsspiel. Er ist monoton wachsend im Steuersatz  $x$ .

Doch das ist nicht das einzige überraschende Phänomen. Wir betrachten als zweites Modell das Szenario „Loser Bonus“. Darin muss nicht der Gewinner eine Spielsteuer zahlen, sondern der Verlierer bekommt einen prozentualen Anteil  $x$  seines Verlustes von einer dritten Instanz zurück erstattet. Es stellt sich heraus, dass hier der Erwartete Transfer mit dem im Gewinner-Steuerszenario exakt übereinstimmt.

Innerhalb der Arbeit werden sechs mögliche Szenarien untersucht, wobei stets ein Prozentsatz  $x \in [0, 1]$  angenommen wird:

- **„Winner Tax“**: Der Gewinner erhält nur  $(1 - x)|a_{ij}|$  anstatt des vollen Gewinns  $|a_{ij}|$ . Der Verlierer zahlt den vollen Betrag  $|a_{ij}|$ .
- **„Loser Bonus“**: Der Verlierer muss nur  $(1 - x)|a_{ij}|$  anstatt seines vollen Verlustes  $|a_{ij}|$  zahlen. Der Gewinner erhält den vollen Betrag  $|a_{ij}|$ .
- **„Loser Tax“**: Der Verlierer zahlt  $(1 + x)|a_{ij}|$  anstatt nur seines Verlustes  $|a_{ij}|$ . Der Gewinner erhält den Betrag  $|a_{ij}|$ .
- **„Winner Bonus“**: Der Gewinner erhält  $(1 + x)|a_{ij}|$  anstatt nur seines Gewinns  $|a_{ij}|$ . Der Verlierer zahlt den Betrag  $|a_{ij}|$ .
- **„Bilateral Tax“**: Der Gewinner erhält nur  $(1 - \frac{1}{2}x)|a_{ij}|$  und der Verlierer zahlt gleichzeitig  $(1 + \frac{1}{2}x)|a_{ij}|$ .
- **„Bilateral Bonus“**: Der Gewinner erhält  $(1 + \frac{1}{2}x)|a_{ij}|$  und der Verlierer zahlt gleichzeitig nur  $(1 - \frac{1}{2}x)|a_{ij}|$ .

In jedem der sechs Modelle wird ein Betrag von  $x \cdot |a_{ij}|$  als Steuer abgegeben bzw. als Bonus ausgezahlt. Bei den zweiseitigen Szenarien „Bilateral Tax“ und „Bilateral Bonus“ teilen sich Gewinner und Verlierer diesen Betrag. Daher kommt bei ihnen der Faktor  $\frac{1}{2}$  hinzu.

Genau wie zwischen den Szenarien „Winner Tax“ und „Loser Bonus“ besteht auch ein direkter Zusammenhang zwischen den Szenarien „Loser Tax“ und „Winner Bonus“ sowie einer zwischen „Bilateral Tax“ und „Bilateral Bonus“. In allen Szenarien nimmt der Erwartete Transfer, wie oben beschrieben, zu.

Diese Zusammenhänge gelten im vollen Umfang nur für faire  $2 \times 2$  - und symmetrische  $3 \times 3$  - Matrixspiele. Experimentelle Ergebnisse deuten jedoch an, dass faire Matrixspiele größerer Dimensionen tendenziell ähnliche Eigenschaften aufweisen.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt gegliedert:

In Kapitel 1 werden bekannte Definitionen und Sätze aus dem Gebiet der nicht-kooperativen Spieltheorie aufgeführt. Diese werden für die exakte Formulierung des Modells zum Erwarteten Transfer in Kapitel 2 sowie für die Beweise der entsprechenden Aussagen benötigt. Im Kernkapitel 3 werden obige Behauptungen, separat für faire  $2 \times 2$  - und symmetrische  $3 \times 3$  - Matrixspiele, zunächst an einer Beispielrechnung verdeutlicht, mathematisch formuliert und anschließend bewiesen. Weitere interessante Bemerkungen und einige experimentelle Ergebnisse folgen jeweils in einem Unterabschnitt. Für Matrixspiele höherer Dimensionen werden in Kapitel 4 experimentelle Resultate vorgestellt. In einer abschließenden Zusammenfassung werden die Ergebnisse diskutiert und einige offene Probleme genannt.

Hingewiesen sei an dieser Stelle auf das Paper „Taxed Matrix Games and Changes in the Expected Transfer“ [AB 2012], das die grundlegenden Aussagen dieser Arbeit in englischer Sprache darstellt.

# 1. Theoretische Grundlagen aus der nicht-kooperativen Spieltheorie

## 1.1. Grundlegende Begriffe und Definitionen

In der Spieltheorie unterscheidet man grundlegend zwischen nicht-kooperativen und kooperativen Spielen. Bei nicht-kooperativen Spielen geht man davon aus, dass jeder der teilnehmenden Spieler versucht, seinen eigenen Profit zu maximieren. Die Spieler treffen dabei keinerlei Absprachen. Hingegen ist es bei kooperativen Spielen möglich, dass die verschiedenen Spieler Koalitionen eingehen. Ziel ist es in diesem Fall, den maximalen kollektiven Gewinn zu erzielen. Diese Arbeit befasst sich ausschließlich mit nicht-kooperativen Spielen. Alle Aussagen werden unter der starken Voraussetzung getroffen, dass die Spieler egoistisch spielen. Jeder handelt im Sinne des Homo oeconomicus und entscheidet sich für Spielstrategien, die den eigenen Gewinn maximieren.

Außerdem betrachten wir lediglich die Klasse der endlichen, einstufigen Spiele und noch weiter eingeschränkt, speziell die so genannten Bimatrixspiele. Zunächst soll geklärt werden, was wir unter so einem Spiel verstehen wollen. Anschließend wird auf mögliche Verhaltensweisen der Spieler in solchen Spielsituationen eingegangen. Dabei wird das Konzept von reinen und gemischten Strategien erklärt. Schlussendlich wird der Begriff des Nash-Gleichgewichts eingeführt und erläutert.

### 1.1.1. Matrixspiele und Bimatrixspiele

Bei einem Bimatrixspiel gibt es genau zwei Akteure: Spieler 1, der Zeilenspieler und Spieler 2, der Spaltenspieler. Beide Spieler sind genau einmal, und zwar gleichzeitig, am Zug. Spieler 1 hat  $m$  verschiedene Strategien  $s_{1,1}, \dots, s_{1,m}$  zur Auswahl, von denen er eine wählen muss. Analog kann sich Spieler 2 für eine der  $n$  Strategien  $s_{2,1}, \dots, s_{2,n}$  entscheiden. Bei endlichen Bimatrixspielen ist entscheidend, dass jeder Spieler nur endlich viele Strategien zur Auswahl hat.

Für jede Kombination der gewählten Strategien steht fest, wie viel Gewinn bzw. Verlust die jeweiligen Spieler zu verzeichnen haben. Diese Information wird durch die Nutzenfunktionen  $u_1: S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$  für Spieler 1 und  $u_2: S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$  für Spieler 2 gegeben.



Ein Standardbeispiel ist das Spiel Stein-Schere-Papier, dessen Auszahlungen in der folgenden Übersicht dargestellt sind. Wählt beispielsweise der Zeilenspieler die Strategie  $s_{1,2}$  (Schere) und der Spaltenspieler die Strategie  $s_{2,1}$  (Stein), so hat der Zeilenspieler einen Verlust von 1 Einheit zu verzeichnen. Hingegen kann der Spaltenspieler einen Gewinn von 1 Einheit einstreichen. Formal gilt  $u_1(s_{1,2}, s_{2,1}) = -1$  und  $u_2(s_{1,2}, s_{2,1}) = 1$ .

**Spiel 1 (Stein-Schere-Papier, [Rie 2010, S.80])**

$u_1$	$s_{2,1}$ (Stein)	$s_{2,2}$ (Schere)	$s_{2,3}$ (Papier)	
$s_{1,1}$ (Stein)	0	1	-1	(Auszahlungen aus Sicht des Zeilenspielers)
$s_{1,2}$ (Schere)	-1	0	1	
$s_{1,3}$ (Papier)	1	-1	0	

$u_2$	$s_{2,1}$ (Stein)	$s_{2,2}$ (Schere)	$s_{2,3}$ (Papier)	
$s_{1,1}$ (Stein)	0	-1	1	(Auszahlungen aus Sicht des Spaltenspielers)
$s_{1,2}$ (Schere)	1	0	-1	
$s_{1,3}$ (Papier)	-1	1	0	

Die Informationen aus den Nutzenfunktionen werden verkürzt durch zwei Matrizen wiedergegeben. Die Matrix  $A$  enthält die Auszahlungen jedes möglichen Spielausganges für Spieler 1. Analog enthält die Matrix  $B$  die Auszahlungen für Spieler 2. Im Spiel 1 sind die Auszahlungen gegeben durch die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ein Bimatrixspiel ist demnach vollständig beschrieben durch die Angabe der beiden Auszahlungsmatrizen  $A$  und  $B$ . Im Folgenden gehen wir außerdem stets davon aus, dass beide Spieler über die vollständige Information des Spiels verfügen, d.h. beiden Spielern sind alle Einträge der beiden Auszahlungsmatrizen bekannt.

**Definition 1.1.1 (endliches Bimatrixspiel, [HI 2009, S.4])**

Ein **endliches Bimatrixspiel**  $\Gamma = (A, B)$  ist ein Spiel zwischen zwei Spielern, bei dem jeder Spieler genau einmal am Zug ist. Das Spiel  $\Gamma$  ist durch die Auszahlungsmatrizen  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  vollständig erklärt.

Die **Strategiemenge**  $S_1$  des Spielers 1 besteht aus  $m$  Strategien

$$S_1 = \{s_{1,1}, \dots, s_{1,m}\}.$$

Wählt Spieler 1 die Strategie  $s_{1,i}$ , so sagen wir auch: Spieler 1 spielt Zeile  $i$ .

Analog besteht die **Strategiemenge**  $S_2$  des Spielers 2 aus  $n$  Strategien

$$S_2 = \{s_{2,1}, \dots, s_{2,n}\}.$$

Wählt Spieler 2 die Strategie  $s_{2,j}$ , so sagen wir auch: Spieler 2 spielt Spalte  $j$ .

Die Funktion  $u_1: S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ , mit  $u_1(s_{1,i}, s_{2,j}) = a_{ij}$  heißt **Nutzenfunktion** des Spielers 1.

Analog heißt die Funktion  $u_2: S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ , mit  $u_2(s_{1,i}, s_{2,j}) = b_{ij}$  **Nutzenfunktion** des Spielers 2.

Ein Zug eines Spielers besteht in der Entscheidung für genau eine Strategie. Beide Spieler sind gleichzeitig am Zug. Wählt Spieler 1 Zeile  $i$  und Spieler 2 Spalte  $j$ , so ist die Auszahlung für Spieler 1 gegeben durch  $u_1(s_{1,i}, s_{2,j}) = a_{ij}$  und für Spieler 2 durch  $u_2(s_{1,i}, s_{2,j}) = b_{ij}$ . Dabei bedeuten positive Werte einen Gewinn für den jeweiligen Spieler, während negative Werte einen Verlust anzeigen.

Einen Spezialfall unter diesen Spielen stellen die so genannten Nullsummenspiele dar. Sie zeichnen sich durch die Eigenschaft aus, dass die Summe über die Auszahlungen der teilnehmenden Spieler in jeder denkbaren, gespielten Strategie-Kombination gleich Null ist. Das Spiel 1 (Stein-Schere-Papier) besitzt zum Beispiel diese Nullsummeneigenschaft.

**Definition 1.1.2 (Matrixspiel, [HI 2009, S.56])**

Ein **endliches Zwei-Personen-Nullsummenspiel**, oder kurz **Matrixspiel**, ist ein Bimatrixspiel  $\Gamma = (A, B)$ , bei dem für jedes  $i$  ( $i \in \{1, \dots, m\}$ ) und für jedes  $j$  ( $j \in \{1, \dots, n\}$ ) gilt

$$u_1(s_{1,i}, s_{2,j}) = a_{ij} = -b_{ij} = -u_2(s_{1,i}, s_{2,j}),$$

oder anders ausgedrückt:  $A = -B$ .

Bei Matrixspielen ist das Spiel  $\Gamma = (A, B)$  bereits durch die Angabe einer Auszahlungsmatrix vollständig beschrieben, da  $A = -B$  gilt. Oft gibt man in so einem Fall nur die Auszahlungsmatrix  $A$  des Zeilenspielers an.

Einen weiteren Spezialfall unter den Bimatrixspielen bilden die symmetrischen Spiele.

**Definition 1.1.3 (symmetrisches Bimatrixspiel, [Sch 2004, S.28])**

Ein **symmetrisches Bimatrixspiel** ist ein Spiel  $\Gamma = (A, B)$ , bei dem sich beide Spieler mit der gleichen Ausgangssituation konfrontiert sehen, d.h. es gilt

$$A = B^T.$$

**Beispiel 1.1.4**

Das Spiel 1 (Stein-Schere-Papier) ist ein symmetrisches Matrixspiel.

### 1.1.2. Gemischte Strategien und erwartete Auszahlung

Gegeben sei nun stets ein endliches Bimatrixspiel  $\Gamma = (A, B)$ . Es stellt sich die Frage, wie sollten die Spieler optimalerweise agieren, damit sie jeweils ihren eigenen Profit maximieren? Um darauf eine Antwort zu geben, definieren wir zunächst das Konzept von reinen und gemischten Strategien.

Wir stellen uns vor, dass die beiden Akteure das Bimatrixspiel mehrmals hintereinander spielen. Ein Spieler hat dann einerseits die Möglichkeit deterministisch zu spielen, d.h. mit Sicherheit wählt er stets ein und die selbe Strategie. Man spricht in diesem Fall von einer reinen Strategie. Andererseits könnte der Spieler seine Entscheidungen randomisieren und eine so genannte gemischte Strategie spielen. In diesem Fall wählt er seine Strategien nach einer bestimmten Wahrscheinlichkeitsverteilung aus. Diese drückt bei häufiger Wiederholung des Spiels aus, wie oft der Spieler im Schnitt welche Strategie wählt.

Wird das Spiel hingegen nur einmal ausgeführt, so ist bei einer reinen Strategie klar, für welche Zeile bzw. Spalte sich der Spieler entscheiden wird. Im Fall einer gemischten Strategie kann man nur angeben, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Spieler sich für eine bestimmte Zeile bzw. Spalte entscheiden wird.

#### Definition 1.1.5 (reine Strategie, [Sch 2004, S.30])

Der Zeilenspieler spielt die **reine Strategie**  $p = \underbrace{(0, \dots, 1, \dots, 0)}_m$ , wenn er mit Sicherheit die  $i$ -te Zeile spielt ( $i \in \{1, \dots, m\}$ ).

Analog spielt der Spaltenspieler die **reine Strategie**  $q = \underbrace{(0, \dots, 1, \dots, 0)}_n$ , wenn er mit Sicherheit die  $j$ -te Spalte spielt ( $j \in \{1, \dots, n\}$ ).

#### Definition 1.1.6 (gemischte Strategie, [Sch 2004, S.30])

Spieler 1 spielt die **gemischte Strategie**  $p = (p_1, \dots, p_m)$ , wenn er mit Wahrscheinlichkeit  $p_i$  die  $i$ -te Zeile spielt (mit  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $p_i \in [0, 1]$  und  $\sum_{i=1}^m p_i = 1$ ).

Spieler 2 spielt die **gemischte Strategie**  $q = (q_1, \dots, q_n)$ , wenn er mit Wahrscheinlichkeit  $q_j$  die  $j$ -te Spalte spielt (mit  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $q_j \in [0, 1]$  und  $\sum_{j=1}^n q_j = 1$ ).

Man sieht, dass mit dieser Definition die reinen Strategien einen Spezialfall der gemischten Strategien bilden. Wir bezeichnen mit  $\Sigma_m$  die Menge aller möglichen reinen und gemischten Strategien des Zeilenspielers:

$$\Sigma_m := \left\{ p = (p_1, \dots, p_m) \mid \sum_{i=1}^m p_i = 1, p_i \in [0, 1] \text{ für } i \in \{1, \dots, m\} \right\}.$$

Analog für den Spaltenspieler:

$$\Sigma_n := \left\{ q = (q_1, \dots, q_n) \mid \sum_{j=1}^n q_j = 1, q_j \in [0, 1] \text{ für } j \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

Hat sich der Spieler für eine gemischte Strategie entschieden, so interessieren wir uns oftmals dafür, welche Zeilen bzw. Spalten er tatsächlich, mit positiver Wahrscheinlichkeit auswählt und welche er nie benutzen wird. Unter dem Träger (oder auch Support) einer gemischten Strategie wollen wir dazu das Folgende verstehen.

**Definition 1.1.7 (Träger einer gemischten Strategie, [Sch 2004, S.31])**

Der **Träger** (oder **Support**)  $\text{supp}(p)$  der gemischten Strategie  $p = (p_1, \dots, p_m)$ ,  $p \in \Sigma_m$  ist die Menge der Indizes der Strategien, die mit positiver Wahrscheinlichkeit gespielt werden:

$$\text{supp}(p) := \{i \in \{1, \dots, m\} \mid p_i > 0\}.$$

Spiele beide Spieler eine reine Strategie, d.h. eine Strategie mit Trägermächtigkeit 1, so sind die Auszahlungen für beide Akteure durch die Matrizen  $A$  und  $B$  eindeutig gegeben. Entscheidet sich jedoch mindestens einer der Beiden für eine gemischte Strategie, so ist nicht sofort klar, was als Auszahlung für die Akteure betrachtet werden soll. Das Ergebnis kann, je nach Zufallsentscheidung, stets anders ausfallen. Man betrachtet in diesem Fall die erwartete Auszahlung der Spieler.

**Definition 1.1.8 (erwartete Auszahlung, [Sch 2004, S.30])**

Spielt der Zeilenspieler die gemischte Strategie  $p \in \Sigma_m$  und der Spaltenspieler die gemischte Strategie  $q \in \Sigma_n$ , so ist die **erwartete Auszahlung** des Zeilenspielers  $v_1(p, q)$  gegeben durch

$$v_1(p, q) := p^\top Aq = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i q_j a_{ij}.$$

Analog ist die **erwartete Auszahlung** des Spaltenspielers  $v_2(p, q)$  gegeben durch

$$v_2(p, q) := p^\top Bq = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i q_j b_{ij}.$$

**Beispiel 1.1.9**

Spiele die Akteure im Spiel 1 (Stein-Schere-Papier, S. 9) die gemischten Strategien  $p = q = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})^\top$ , so haben beide eine erwartete Auszahlung von Null:  $v_1(p, q) = v_2(p, q) = 0$ .

Sprechen wir davon, dass beide Spieler mit der Wahl einer reinen oder gemischten Strategie ihren eigenen Profit optimieren wollen, so meinen wir die Maximierung der jeweiligen erwarteten Auszahlung.

### 1.1.3. Nash-Gleichgewicht

Um das Konzept des Nash-Gleichgewichts zu erklären, dessen Namensgeber JOHN F. NASH 1994 den Nobelpreis für seine Arbeit in diesem Bereich der Spieltheorie erhielt, definieren wir zunächst einen weiteren Begriff.

**Definition 1.1.10 (beste Antwort, [ARSS 2009, S.12])**

Es seien  $\hat{p} \in \Sigma_m$  und  $\hat{q} \in \Sigma_n$  gemischte Strategien der beiden Spieler.

Für Spieler 1 heißt  $\tilde{p} \in \Sigma_m$  eine **beste Antwort** auf  $\hat{q}$ , falls  $\tilde{p}$  die erwartete Auszahlung für Spieler 1 maximiert, unter der Annahme dass Spieler 2 die Strategie  $\hat{q}$  spielt. D.h.

$$\tilde{p}^\top A \hat{q} = \max_{p \in \Sigma_m} (v_1(p, \hat{q})) = \max_{p \in \Sigma_m} (p^\top A \hat{q}).$$

Analog heißt  $\tilde{q} \in \Sigma_n$  für Spieler 2 eine **beste Antwort** auf  $\hat{p}$ , falls

$$\hat{p}^\top B \tilde{q} = \max_{q \in \Sigma_n} (v_2(\hat{p}, q)) = \max_{q \in \Sigma_n} (\hat{p}^\top B q).$$

Die beste Antwort auf eine gegebene Strategie muss nicht eindeutig sein. Dazu betrachten wir das folgende Beispiel.

**Spiel 2**

$\Gamma = (A, B)$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Beispiel 1.1.11**

Spielt der Spaltenspieler in Spiel 2 die gemischte Strategie  $\hat{q} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)^\top$ , dann ist für den Zeilenenspieler jede Strategie  $p \in \Sigma_3$  eine beste Antwort auf  $\hat{q}$ .

Mit Hilfe des Begriffs der besten Antwort können wir die zentrale Definition des Nash-Gleichgewichts formulieren.

**Definition 1.1.12 (Nash-Gleichgewicht, [Nas 1951])**

Das Paar  $(\bar{p}, \bar{q})$  von Strategien  $\bar{p} \in \Sigma_m$  und  $\bar{q} \in \Sigma_n$  heißt **Nash-Gleichgewicht** (oder kurz: **Gleichgewicht**) für das Bimatrixspiel  $\Gamma = (A, B)$ , falls  $\bar{p}$  eine beste Antwort auf  $\bar{q}$ , und  $\bar{q}$  eine beste Antwort auf  $\bar{p}$  ist. In diesem Fall gilt für alle Strategien  $p \in \Sigma_m, q \in \Sigma_n$ :

$$\bar{p}^\top A \bar{q} \geq p^\top A \bar{q} \quad \text{und} \quad \bar{p}^\top B \bar{q} \geq \bar{p}^\top B q.$$

Die Strategien  $\bar{p}$  und  $\bar{q}$  heißen **Gleichgewichts-Strategien**.

Wir sprechen von einem **Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien** (oder kurz: **reines Gleichgewicht**), wenn  $\bar{p}$  und  $\bar{q}$  beides reine Strategien sind.

Ist mindestens eine der Strategien  $\bar{p}$  oder  $\bar{q}$  keine reine Strategie, so sprechen wir von einem **Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien** (oder kurz: **gemischtes Gleichgewicht**).

Die Spielsituation in einem Nash-Gleichgewicht zeichnet sich insbesondere dadurch aus, dass keiner der beiden Spieler einen echten Anreiz hat, seine Strategie zu ändern. Bei der Wahl jeder anderen reinen oder gemischten Strategie wird ein Spieler seine erwartete Auszahlung verschlechtern oder bestenfalls lediglich beibehalten.

Ist für ein Bimatrixspiel  $\Gamma = (A, B)$  ein eindeutiges Nash-Gleichgewicht vorhanden, so werden sich die vollständig informierten, rein profitorientierten und egoistischen Spieler für das Spielen der eindeutigen Gleichgewichts-Strategien entscheiden. Sind hingegen mehrere Nash-Gleichgewichte vorhanden, so ist nicht klar, für welche der möglichen Gleichgewichts-Strategien sich die jeweiligen Spieler entscheiden sollen.

Unter der **Lösung** eines Bimatrixspiels versteht man das Auffinden aller Nash-Gleichgewichte.

### Beispiel 1.1.13

Das Spiel 1 (Stein-Schere-Papier, S. 9) hat genau ein Nash-Gleichgewicht, mit den Gleichgewichts-Strategien  $\bar{p} = \bar{q} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})^\top$ .

Das Spiel 2 (S. 13) besitzt unendlich viele Gleichgewichte. Unter anderem gilt für jedes  $t \in [0, 1]$ :  $(\bar{p}, \bar{q}) = ((\frac{1}{2}t, \frac{1}{2}t, 1-t)^\top, (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)^\top)$  ist ein Gleichgewicht.

## 1.2. Bekannte Sätze und Eigenschaften

In diesem Abschnitt wird ein Überblick über bekannte Aussagen und Eigenschaften für Gleichgewichte von Bimatrixspielen gegeben. Dabei werden die entsprechenden Resultate lediglich benannt. Auf das Führen der bekannten Beweise wird verzichtet. Alle Aussagen und Beweise können in den jeweils angegebenen Quellen nachgelesen werden.

### 1.2.1. Aussagen für Bimatrixspiele

Der wichtige Satz über die Existenz eines Nash-Gleichgewichts in beliebigen endlichen, einstufigen Spielen geht auf JOHN NASH zurück. Wir formulieren das Resultat hier für Bimatrixspiele.

**Satz 1.2.1 (Existenz eines Nash-Gleichgewichts, [Nas 1951])**

Jedes endliche Bimatrixspiel  $\Gamma = (A, B)$  hat mindestens ein Nash-Gleichgewicht.

NASH bewies auch die folgende Aussage, die oftmals sehr hilfreich für das Auffinden von Gleichgewichten ist. Sie besagt, dass eine gemischte Strategie  $p \in \Sigma_m$  genau dann eine beste Antwort auf eine gemischte Strategie  $q \in \Sigma_n$  ist, wenn alle reinen Strategien aus ihrem Träger beste reine Antworten auf  $q$  sind (und umgekehrt).

**Satz 1.2.2 (Bedingung für beste Antworten, [Nas 1951])**

Es seien  $p \in \Sigma_m$  und  $q \in \Sigma_n$  gemischte Strategien der beiden Spieler.

Dann ist  $p$  genau dann eine beste Antwort auf  $q$ , wenn für alle  $i \in \{1, \dots, m\}$  gilt

$$p_i > 0 \Rightarrow (Aq)_i = u_1 = \max_{k \in \{1, \dots, m\}} (Aq)_k.$$

Analog ist  $q$  genau dann eine beste Antwort auf  $p$ , wenn für alle  $j \in \{1, \dots, n\}$  gilt

$$q_j > 0 \Rightarrow (B^\top p)_j = u_2 = \max_{k \in \{1, \dots, n\}} (B^\top p)_k.$$

Der Existenzsatz von NASH garantiert das Vorhandensein von mindestens einem Nash-Gleichgewicht für jedes beliebige endliche Bimatrixspiel  $\Gamma = (A, B)$ . Wie wir schon in Beispiel 1.1.13 (S. 14) gesehen haben, kann ein Spiel aber mehrere, sogar unendlich viele Gleichgewichte haben. Um zumindest sicher zu stellen, dass ein vorliegendes Bimatrixspiel nur endlich viele Gleichgewichte besitzt, betrachtet man die folgende Klasse von Spielen.

**Definition 1.2.3 (degeneriertes und nicht-degeneriertes Bimatrixspiel, [The 2005, S.224])**

Ein Bimatrixspiel  $\Gamma = (A, B)$  heißt **nicht-degeneriert**, falls die Anzahl der reinen besten Antworten von Spieler 1 auf eine gemischte Strategie  $q \in \Sigma_n$  von Spieler 2 niemals die Mächtigkeit der Trägermenge  $\text{supp}(q)$  übersteigt und dies ebenso für die reinen besten Antworten von Spieler 2 gilt. Andernfalls heißt das Spiel **degeneriert**.

**Beispiel 1.2.4**

Das Spiel 1 (Stein-Schere-Papier, S. 9) ist nicht-degeneriert. Hingegen ist das Spiel 2 (S. 13) degeneriert.

Nicht-degenerierte Spiele besitzen die beiden schönen, im Folgenden aufgeführten Eigenschaften. Der Satz 1.2.6 kann direkt aus dem Satz 1.2.2 gefolgert werden. Hingegen ist die Aussage aus Satz 1.2.5 nicht so leicht zu sehen und wurde erstmals 1964 von LEMKE und HOWSON bewiesen, die auch einen Algorithmus zum Auffinden von Gleichgewichten für beliebige Bimatrixspiele angaben.

**Satz 1.2.5 (Anzahl von Gleichgewichten in nicht-degenerierten Bimatrixspielen, [LH 1964])**

*Die Anzahl von Nash-Gleichgewichten in nicht-degenerierten Bimatrixspielen ist stets ungerade (insbesondere endlich).*

**Satz 1.2.6 (Trägermächtigkeiten in nicht-degenerierten Bimatrixspielen, [ARSS 2009, S.13])**

*Es sei  $\Gamma = (A, B)$  ein nicht-degeneriertes Bimatrixspiel und  $(\bar{p}, \bar{q})$  ein beliebiges Nash-Gleichgewicht für dieses Spiel. Dann haben die Träger von  $\bar{p}$  und  $\bar{q}$  die gleiche Mächtigkeit:*

$$|\text{supp}(\bar{p})| = |\text{supp}(\bar{q})|.$$

Dieser Satz ist Grundlage für den folgenden Algorithmus, mit dessen Hilfe alle Gleichgewichte eines nicht-degenerierten Bimatrixspiels aufgefunden werden können. Er ist unter dem Name „support enumeration algorithm“ bekannt und wurde von DICKHAUT und KAPLAN beschrieben [DK 1991].

**Algorithmus 1**

*Input: nicht-degeneriertes Bimatrixspiel  $\Gamma = (A, B)$*

*Output: alle Nash-Gleichgewichte des Spiels  $\Gamma = (A, B)$*

*Methode:*

*Löse für jedes  $k = 1, \dots, \min(m, n)$  sowie für jedes Paar  $(I, J)$  von  $k$ -elementigen Teilmengen  $I \subseteq \{1, \dots, m\}$  und  $J \subseteq \{1, \dots, n\}$  die folgenden Gleichungen:*

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} p_i b_{ij} &= u_2, \text{ für } j \in J, \sum_{i \in I} p_i = 1 \quad \text{und} \\ \sum_{j \in J} a_{ij} q_j &= u_1, \text{ für } i \in I, \sum_{j \in J} q_j = 1. \end{aligned}$$

*Prüfe, ob für die Lösungen  $\bar{p}, \bar{q}$  gilt:  $\bar{p} \geq 0, \bar{q} \geq 0$ .*

*Prüfe, ob  $\bar{p}, \bar{q}$  die Bedingungen für gegenseitige beste Antworten aus Satz 1.2.2 erfüllen.*

*Gegebenenfalls ist  $(\bar{p}, \bar{q})$  ein Nash-Gleichgewicht für das Spiel  $\Gamma = (A, B)$ .*



Nicht-degenerierte Spiele können demnach mehrere Gleichgewichte besitzen. Ein offenes Problem der Mathematik besteht in der Angabe einer scharfen oberen Schranke für die maximale Anzahl von Nash-Gleichgewichten bei beliebigen nicht-degenerierten (Bi-)Matrixspielen ([The 2005, S.221]).

Ein wichtiges Resultat in diesem Zusammenhang lieferte Bernhard von Stengel [Ste 1999]. Er konnte zeigen, dass es für gerades  $d$  ein nicht-degeneriertes  $d \times d$ -Spiel gibt, mit  $\tau(d) := f(\frac{d}{2}) + f(\frac{d}{2} - 1) - 1$  Gleichgewichten, wobei

$$f(n) := \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k} \binom{n}{k}.$$

Für das asymptotische Wachstum von  $\tau$  gilt:  $\tau(d) \sim 0.949 \frac{(1+\sqrt{2})^d}{\sqrt{d}}$ .

Neben der unangenehmen Tatsache, dass Bimatrixspiele kein eindeutiges Nash-Gleichgewicht haben müssen, gibt es aber auch hilfreiche Eigenschaften von Gleichgewichten in Bimatrixspielen. Zwei von denen, die insbesondere auch in den Beweisen aus Kapitel 3 vorkommen, sollen hier genannt werden.

**Satz 1.2.7 (strategisch äquivalente Spiele, [SF 1983, S.99])**

Es seien  $\Gamma = (A, B)$  ein endliches Bimatrixspiel und  $c, d, e, f \in \mathbb{R}$  beliebige Konstanten mit  $c, e > 0$ . Das Bimatrixspiel  $\Gamma' := (cA + d \mathbf{1}_{m \times n}, eB + f \mathbf{1}_{m \times n})$  hat die gleichen Nash-Gleichgewichte wie das Ausgangsspiel  $\Gamma$ .  
(Hierbei bezeichne  $\mathbf{1}_{m \times n}$  die  $m \times n$ -Matrix, in der alle Einträge gleich 1 sind.)

**Satz 1.2.8 (Gleichheit von Auszahlungen, [Bar 2008, S.127])**

Sei  $(\bar{p}, \bar{q})$  ein beliebiges Gleichgewicht des endlichen Bimatrixspiels  $\Gamma = (A, B)$ .

Dann gilt für jede, mit positiver Wahrscheinlichkeit gespielte Zeile  $k$ , d.h. für jedes  $k \in \text{supp}(\bar{p})$ :  $v_1(\bar{p}, \bar{q}) = (A\bar{q})_k$ .

Analog gilt für jede Spalte  $k$  mit  $k \in \text{supp}(\bar{q})$ :  $v_2(\bar{p}, \bar{q}) = (B^\top \bar{p})_k$ .

Bei der Suche nach Nash-Gleichgewichten kann weiterhin das folgende Konzept, über dominierte reine Strategien, äußerst hilfreich sein.

**Definition 1.2.9 (dominierte Zeilen und Spalten [Bar 2008, S.35])**

Gegeben sei ein endliches Bimatrixspiel  $\Gamma = (A, B)$ .

Wir sagen, Zeile  $k$  wird von Zeile  $i$  **schwach dominiert (strikt dominiert)**, wenn für alle  $j \in \{1, \dots, n\}$  gilt:  $a_{ij} \geq a_{kj}$  ( $a_{ij} > a_{kj}$ ). Zeile  $k$  heißt dann **schwach dominierte (strikt dominierte)** reine Strategie von Spieler 1.

Analog wird Spalte  $k$  von Spalte  $j$  **schwach dominiert (strikt dominiert)**, wenn für alle  $i \in \{1, \dots, m\}$  gilt:  $b_{ij} \geq b_{ik}$  ( $b_{ij} > b_{ik}$ ). Spalte  $k$  heißt dann **schwach dominierte (strikt dominierte)** reine Strategie von Spieler 2.

Es ist möglich, in einem Spiel iterativ alle strikt dominierten reinen Strategien zu streichen, ohne dass dabei die Menge der Nash-Gleichgewichte verändert wird. Unter dem **iterierten Löschen von strikt dominierten Strategien** ([EK 2010, S.190]) in einem Bimatrixspiel  $\Gamma = (A, B)$  versteht man dabei den folgenden Prozess:

- Finde alle strikt dominierten Zeilen und Spalten in  $\Gamma$ , streiche diese in den beiden Matrizen  $A, B$  und erhalte so das reduzierte Spiel  $\Gamma' = (A', B')$ .
- Finde alle strikt dominierten Zeilen und Spalten in  $\Gamma'$ , streiche diese in den beiden Matrizen  $A', B'$  und erhalte so erneut ein reduziertes Spiel.
- Wiederhole diesen Prozess, bis keine strikt dominierten Zeilen und Spalten mehr vorhanden sind.

**Satz 1.2.10 (Nichtvorkommen von strikt dominierten Strategien in Gleichgewichten, [EK 2010, S.190])**

Sei  $\Gamma = (A, B)$  ein beliebiges endliches Bimatrixspiel und  $\Gamma' = (A', B')$  das Spiel, das nach dem Prozess des iterierten Löschens von strikt dominierten Strategien vorliegt. Dann stimmen die Mengen der Gleichgewichte von  $\Gamma$  und  $\Gamma'$  überein.

### 1.2.2. Aussagen für den Spezialfall von Matrixspielen

Für den Spezialfall der Zwei-Personen-Nullsummenspiele sind schon etwas länger weitere Eigenschaften bekannt. Besonders zu erwähnen ist in diesem Zusammenhang die Arbeit von JOHN VON NEUMANN, der für Nullsummenspiele u.a. die Existenz eines Gleichgewichts mit Hilfe des „Min-Max-Theorems“ als Erster, im Jahr 1928 noch vor JOHN NASH, beweisen konnte.

Mit Definition 1.1.12 (S. 13) erhalten wir für den Spezialfall von Matrixspielen die folgende Charakterisierung eines Gleichgewichts.

Das Paar  $(\bar{p}, \bar{q})$  ist genau dann ein Gleichgewicht für das Spiel  $\Gamma = (A, -A)$ , wenn für alle  $p \in \Sigma_m, q \in \Sigma_n$  gilt:  $p^\top A \bar{q} \leq \bar{p}^\top A \bar{q} \leq \bar{p}^\top A q$ .

Für Gleichgewichte in einem Matrixspiel gilt das Prinzip der Austauschbarkeit. D.h. man kann die Gleichgewichts-Strategien aus verschiedenen Nash-Gleichgewichten beliebig kombinieren, ohne dass die Gleichgewichts-Eigenschaft verloren geht.

**Satz 1.2.11 (Prinzip der Austauschbarkeit, [NM 1944])**

Es seien  $(\bar{p}, \bar{q})$  und  $(\hat{p}, \hat{q})$  zwei beliebige Nash-Gleichgewichte für das Matrixspiel  $\Gamma = (A, -A)$ . Dann sind  $(\bar{p}, \hat{q})$  und  $(\hat{p}, \bar{q})$  ebenso Gleichgewichte. Außerdem gilt

$$\bar{p}^\top A \bar{q} = \bar{p}^\top A \hat{q} = \hat{p}^\top A \hat{q} = \hat{p}^\top A \bar{q}.$$

Dieser Satz rechtfertigt die folgende Definition über den Wert  $\bar{v}$  eines Matrixspiels  $\Gamma = (A, -A)$ .

**Definition 1.2.12 (Wert eines Matrixspiels, [SF 1983, S.115])**

Es sei  $(\bar{p}, \bar{q})$  ein beliebiges Nash-Gleichgewicht des Matrixspiels  $\Gamma = (A, -A)$ . Dann ist der **Wert**  $\bar{v}$  des Spiels gegeben durch

$$\bar{v} := \bar{p}^\top A \bar{q} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \bar{p}_i \bar{q}_j a_{ij}.$$

Der Wert eines Nullsummenspiels ist nach Satz 1.2.11 stets eindeutig gegeben. Er stimmt mit der erwarteten Auszahlung des Zeilenspielers und der negativen erwarteten Auszahlung des Spaltenspielers überein, wenn beide Spieler eine beliebige Gleichgewichts-Strategie spielen. Es gilt:  $\bar{v} = v_1(\bar{p}, \bar{q}) = -v_2(\bar{p}, \bar{q})$ .

**Definition 1.2.13 (fares Matrixspiel, [Bar 2008, S.11])**

Ein Matrixspiel  $\Gamma = (A, -A)$  heißt **fair**, falls es den Spielwert  $\bar{v} = 0$  besitzt.

**Beispiel 1.2.14**

Sowohl das Spiel 1 (Stein-Schere-Papier, S. 9) als auch das Spiel 2 (S. 13) haben den Spielwert  $\bar{v} = 0$  und sind daher faire Matrixspiele.

Die folgende Eigenschaft über Gleichgewichts-Strategien von Matrixspielen kann als Erweiterung des Prinzips der Austauschbarkeit verstanden werden.

**Satz 1.2.15 (Konvexität der Gleichgewichts-Strategiemenge, [Kar 1959])**

Die Menge der Gleichgewichts-Strategien eines beliebigen endlichen Matrixspiels  $\Gamma = (A, -A)$  ist ein konvexes Polyeder.

Mit dieser Aussage und Satz 1.2.5 (S. 16) erhält man sofort den folgenden Sachverhalt, über die Eindeutigkeit von Nash-Gleichgewichten im Fall von nicht-degenerierten, endlichen Zwei-Personen-Nullsummenspielen.

**Satz 1.2.16 (eindeutige Lösung für nicht-degenerierte Matrixspiele)**

Jedes nicht-degenerierte Matrixspiel  $\Gamma = (A, -A)$  hat genau ein Gleichgewicht.

Für symmetrische Matrixspiele, d.h. für Spiele  $\Gamma = (A, -A)$  mit schiefsymmetrischer Matrix  $A$  (d.h.  $A = -A^\top$ ), gilt weiterführend der folgende Satz.

**Satz 1.2.17 (symmetrische Matrixspiele [SF 1983, S.120])**

Sei  $\Gamma = (A, -A)$  ein symmetrisches Matrixspiel. Dann

(i) ist der Wert des Spiels gegeben durch  $\bar{v} = 0$ .

(ii) sind die Mengen der Gleichgewichts-Strategien beider Spieler identisch.

## 2. Modell zum Erwarteten Transfer

### 2.1. Erwarteter Transfer in Matrixspielen

Wie aus Kapitel 1 hervorgeht, ist der Begriff der erwarteten Auszahlung in der Literatur der Spieltheorie gut ausgearbeitet. Gegeben sei ein Matrixspiel  $\Gamma = (A, -A)$  und beliebige gemischte Strategien  $p \in \Sigma_m, q \in \Sigma_n$  der beiden Spieler. Die erwarteten Auszahlungen der Spieler geben an, mit wie viel Gewinn bzw. Verlust sie durchschnittlich jeweils rechnen müssen. Nach Definition 1.1.8 (S. 12) berechnet man sie durch

$$v_1(p, q) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i q_j a_{ij} = -v_2(p, q).$$

Ein neuer Aspekt, der unseres Wissens nach bisher noch nicht in der Literatur beachtet wird, ist die Frage nach dem Erwarteten Transfer in bestimmten Spielsituationen. Wie viele Einheiten werden durchschnittlich transferiert, wenn die Akteure die Strategien  $p$  bzw.  $q$  spielen? D.h. wir interessieren uns für den Betrag von Einheiten, der im Mittel bei jeder Partie über den Tisch geht, wenn die Spieler bestimmte gemischte Strategien benutzen. Dazu geben wir die folgende Definition.

**Definition 2.1.1 (Erwarteter Transfer, [Alt 2011])**

Gegeben sei ein Matrixspiel  $\Gamma = (A, -A)$ . Spielt der Zeilenspieler die gemischte Strategie  $p \in \Sigma_m$  und der Spaltenspieler die gemischte Strategie  $q \in \Sigma_n$ , so ist der **Erwartete Transfer** gegeben durch

$$ET(\Gamma; p, q) := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i q_j |a_{ij}|.$$

Insbesondere interessieren wir uns dafür, wie groß der Erwartete Transfer in einem Nash-Gleichgewicht  $(\bar{p}, \bar{q})$  ist, d.h. wie viel durchschnittlich transferiert wird, wenn beide Spieler ihre Gleichgewichts-Strategien  $\bar{p}$  bzw.  $\bar{q}$  benutzen.

Ein Matrixspiel  $\Gamma = (A, -A)$  kann mehrere Gleichgewichte haben, wie wir schon für Spiel 2 gesehen hatten (S. 14). Nach Satz 1.2.11 (S. 18) ist es nicht

von Bedeutung, welche Gleichgewichts-Strategien gespielt werden, die erwarteten Auszahlungen sind stets die gleichen. Für zwei beliebige Gleichgewichte  $(\bar{p}, \bar{q})$  und  $(\hat{p}, \hat{q})$  des Spiels gilt:  $v_1(\bar{p}, \bar{q}) = v_1(\hat{p}, \hat{q}) = -v_2(\bar{p}, \bar{q}) = -v_2(\hat{p}, \hat{q})$ . Insbesondere ist deshalb die Definition eines Spielwertes  $\bar{v} := v_1(\bar{p}, \bar{q})$  gerechtfertigt.

Für den Erwarteten Transfer gilt diese Eigenschaft interessanterweise nicht. Dazu betrachten wir beispielhaft das Spiel 2.

### Beispiel 2.1.2

Das Spiel 2 ist definiert durch  $\Gamma = (A, -A)$  mit  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

In Beispiel 1.1.13 (S. 14) hatten wir gesehen, dass für jedes  $t \in [0, 1]$  ein Gleichgewicht gegeben ist durch  $(\bar{p}, \bar{q}) = ((\frac{1}{2}t, \frac{1}{2}t, 1-t)^\top, (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)^\top)$ .

Für den Erwarteten Transfer gilt in diesen Gleichgewichten

$$ET(\Gamma; \bar{p}, \bar{q}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t & \frac{1}{2}t & 1-t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = t.$$

Insbesondere kann der Erwartete Transfer, im Extremfall, für unendlich viele verschiedene Gleichgewichte auch unendlich viele Werte annehmen.

Besitzt ein Matrixspiel  $\Gamma = (A, -A)$  jedoch ein eindeutiges Gleichgewicht  $(\bar{p}, \bar{q})$ , was nach Satz 1.2.16 (S. 19) beispielsweise für jedes nicht-degenerierte Zwei-Personen-Nullsummenspiel der Fall ist, so können wir vom **Erwarteten Transfer des Spiels**  $\Gamma$  sprechen. Wir bezeichnen damit den Erwarteten Transfer, wenn beide Spieler ihre jeweilige Gleichgewichts-Strategie spielen. In diesem Fall schreiben wir kurz

$$ET(\Gamma) := ET(\Gamma; \bar{p}, \bar{q}).$$

Im Folgenden untersuchen wir, wie sich der Erwartete Transfer eines nicht-degenerierten Matrixspiels  $\Gamma = (A, -A)$  ändert, wenn wir die Auszahlungsmatrizen der beiden Spieler auf eine ganz bestimmte Art und Weise verändern.

Als Basismodell betrachten wir das Szenario „Winner Tax“, in dem der Gewinner eine Spielsteuer, in Höhe eines prozentualen Anteils  $x \in [0, 1]$ , an eine dritte Instanz, beispielsweise den Staat, entrichten muss.

Wählt in diesem Modell Spieler 1 Zeile  $i$  und Spieler 2 Zeile  $j$ , so werden  $|a_{ij}|$  Einheiten transferiert. Ist  $a_{ij} > 0$ , so muss Spieler 2 den gesamten Betrag  $a_{ij}$  zahlen. Spieler 1 gewinnt dabei aber nur  $(1-x) \cdot a_{ij}$ , weil er  $x \cdot a_{ij}$  abgeben muss. Ist hingegen  $a_{ij} < 0$ , so zahlt analog Spieler 1 den gesamten Betrag  $|a_{ij}|$ ,

während Spieler 2 nur  $(1 - x) \cdot |a_{ij}|$  als Gewinn verbuchen kann. Ist  $a_{ij} = 0$ , so werden keine Steuern erhoben.

Aus dem Matrixspiel  $\Gamma$  ist nun ein Bimatixspiel geworden, mit

$$\Gamma_{\text{WiT}}(\text{tax} = x) = (A(\text{tax} = x), B(\text{tax} = x)) \quad (\text{kurz: } \Gamma_{\text{WiT}}(x) = (A(x), B(x)))$$

und

$$A(x) = (a_{ij}(x)) = \begin{cases} (1-x)a_{ij} & , \text{ falls } a_{ij} > 0 \\ a_{ij} & , \text{ falls } a_{ij} \leq 0 \end{cases}$$

$$B(x) = (b_{ij}(x)) = \begin{cases} -(1-x)a_{ij} & , \text{ falls } a_{ij} < 0 \\ -a_{ij} & , \text{ falls } a_{ij} \geq 0. \end{cases}$$

Die Abkürzung „WiT“ steht dabei für „Winner Tax“ und soll verdeutlichen, durch welches Szenario das Bimatixspiel entstanden ist.

Wir wollen den Erwarteten Transfer des manipulierten Spiels mit dem des Ausgangsspiels vergleichen. Es ist nicht sofort klar, ob auch das entstandene Bimatixspiel  $\Gamma_{\text{WiT}}(x)$  ein eindeutiges Gleichgewicht besitzt. Wenn dies aber der Fall ist, berechnen wir die Gleichgewichts-Strategien  $(\bar{p}(x), \bar{q}(x))$  und bestimmen den Erwarteten Transfer des Bimatixspiels durch

$$ET(\Gamma_{\text{WiT}}(x); \bar{p}(x), \bar{q}(x)) \stackrel{\text{kurz}}{=} ET(\Gamma_{\text{WiT}}(x)) := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \bar{p}_i(x) \bar{q}_j(x) |a_{ij}|.$$

Wie schon angedeutet, nehmen wir also insbesondere für jeden Spielausgang an, dass trotz Besteuerung ein Betrag von  $|a_{ij}|$  transferiert wird. Dies entspricht anschaulich einem **Transfer vor Steuerabgabe**.

Im Allgemeinen gehen wir von einem nicht-degenerierten Nullsummenspiel  $\Gamma = (A, -A)$  mit eindeutigem Gleichgewicht  $(\bar{p}, \bar{q})$  aus. In einem bestimmten Szenario erhalten wir aus diesem Spiel, durch Manipulation der Matrizen  $A$  und  $-A$ , ein Bimatixspiel  $\Gamma' = (A', B')$ . Falls dieses Spiel ein eindeutiges Nash-Gleichgewicht  $(\bar{p}', \bar{q}')$  besitzt, so vergleichen wir den Erwarteten Transfer des Ausgangsspiels  $ET(\Gamma)$  mit dem Erwarteten Transfer des Bimatixspiels  $ET(\Gamma')$ , wobei

$$ET(\Gamma) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \bar{p}_i \bar{q}_j |a_{ij}| \quad \text{und} \quad ET(\Gamma') = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \bar{p}'_i \bar{q}'_j |a_{ij}|.$$

Wir lassen im Wesentlichen zwei Arten von Manipulationen zu. Aus Sicht der Spieler gibt es unvorteilhafte und vorteilhafte Manipulationen ihrer Auszahlungen. Einerseits kann, wie beispielsweise oben beschrieben, eine **Steuerabgabe** fällig werden, d.h. jemand muss etwas an eine dritte Instanz zahlen. Zum anderen können Manipulationen in Form von **Bonuszahlungen** auftreten, d.h. jemand bekommt einen Zuschuss von einer dritten Instanz.

## 2.2. Definition verschiedener unvorteilhafter und vorteilhafter Manipulations-Szenarien

In den sich anschließenden Kapiteln werden sechs verschiedene Szenarien untersucht. An dieser Stelle soll dazu ein Überblick gegeben werden.

Wir analysieren Szenarien, in denen beide Spieler gleichberechtigt mit genau einer Art von Manipulation ihrer Auszahlung konfrontiert sind.

Die beiden natürlichsten Modelle sind dabei wohl die Szenarien „Winner Tax“ (kurz „WiT“) und „Loser Bonus“ (kurz „LoB“), in denen der Gewinner eine prozentuale Spielsteuer zahlen muss, bzw. der Verlierer eine Rückerstattung („Compensation“) in Form einer prozentualen Bonuszahlung erhält. Wir untersuchen aber auch die komplementären Fälle „Loser Tax“ (kurz „LoT“) und „Winner Bonus“ (kurz „WiB“), sowie die Szenarien „Bilateral Tax“ (kurz „BiT“) und „Bilateral Bonus“ (kurz „BiB“), in denen beide Spieler, egal ob sie gewinnen oder verlieren, eine Steuer zahlen müssen bzw. eine Bonuszahlung erhalten.

Eine Nebenbemerkung zur Namensgebung der Szenarien: Bekommt der Verlierer einen prozentualen Anteil seines Verlustes zurück erstattet, so erscheint der Name „Loser Compensation“ natürlicher. Da wir aber auch den komplementären Fall betrachten, in dem der Gewinner einen Zuschuss erhält, haben wir uns aus Gründen der Einheitlichkeit für die Formulierung „Bonus“ entschieden.

Sei  $\Gamma = (A, -A)$  ein Matrixspiel und  $x \in [0, 1]$  ein Prozentsatz. In jedem Szenario soll für jeden möglichen Spielausgang ein Betrag von  $x \cdot |a_{ij}|$  als Steuer abgegeben bzw. als Bonus ausgezahlt werden. In den Modellen „Bilateral Tax“ und „Bilateral Bonus“ wird der Prozentsatz  $x$  unter den beiden Spielern aufgeteilt: Gewinner und Verlierer zahlen (erhalten) jeweils einen Betrag von  $\frac{1}{2} x \cdot |a_{ij}|$  Steuer (Bonus).

In der folgenden Tabelle 2.1 findet man die vollständigen Definitionen der Auszahlungsmatrizen für die resultierenden Bimatrixspiele in diesen sechs Szenarien.

### Bemerkung 2.2.1

Im Oktober 2011 ergab eine Google-Suche nach „taxed matrix games“ genau einen relevanten Treffer. Waner und Costenoble führen in ihrem Lehrbuch „Finite Mathematics“ ([WC 2007, S.217]) den Begriff des Nicht-Nullsummenspiels ein und bemerken in einer Randnotiz: „An example [...] would be one in which the government taxed the earnings of the winner.“ Dies entspricht genau dem eingeführten Szenario „Winner Tax“. Der Bemerkung in diesem Lehrbuch folgen jedoch keine weiteren Ausführungen.

Szenario/ Bezeichnung	Beschreibung	$A' = A(x)$	$B' = B(x)$
Winner Tax $\Gamma_{\text{WiT}}$	Gewinner erhält nur $(1-x) a_{ij} $ statt $ a_{ij} $ und Verlierer zahlt $ a_{ij} $	$a_{ij}(x) = \begin{cases} (1-x)a_{ij} & , \text{ falls } a_{ij} > 0 \\ a_{ij} & , \text{ falls } a_{ij} \leq 0 \end{cases}$	$b_{ij}(x) = \begin{cases} -(1-x)a_{ij} & , \text{ falls } a_{ij} < 0 \\ -a_{ij} & , \text{ falls } a_{ij} \geq 0 \end{cases}$
Loser Tax $\Gamma_{\text{LoT}}$	Verlierer zahlt $(1+x) a_{ij} $ statt nur $ a_{ij} $ und Gewinner erhält $ a_{ij} $	$a_{ij}(x) = \begin{cases} a_{ij} & , \text{ falls } a_{ij} > 0 \\ (1+x)a_{ij} & , \text{ falls } a_{ij} \leq 0 \end{cases}$	$b_{ij}(x) = \begin{cases} -a_{ij} & , \text{ falls } a_{ij} < 0 \\ -(1+x)a_{ij} & , \text{ falls } a_{ij} \geq 0 \end{cases}$
Bilateral Tax $\Gamma_{\text{BiT}}$	Gewinner erhält nur $(1-\frac{1}{2}x) a_{ij} $ und Verlierer zahlt $(1+\frac{1}{2}x) a_{ij} $ statt nur $ a_{ij} $	$a_{ij}(x) = \begin{cases} (1-\frac{1}{2}x)a_{ij} & , \text{ falls } a_{ij} > 0 \\ (1+\frac{1}{2}x)a_{ij} & , \text{ falls } a_{ij} \leq 0 \end{cases}$	$b_{ij}(x) = \begin{cases} -(1-\frac{1}{2}x)a_{ij} & , \text{ falls } a_{ij} < 0 \\ -(1+\frac{1}{2}x)a_{ij} & , \text{ falls } a_{ij} \geq 0 \end{cases}$
Winner Bonus $\Gamma_{\text{WiB}}$	Gewinner erhält $(1+x) a_{ij} $ statt nur $ a_{ij} $ und Verlierer zahlt $ a_{ij} $	$a_{ij}(x) = \begin{cases} (1+x)a_{ij} & , \text{ falls } a_{ij} > 0 \\ a_{ij} & , \text{ falls } a_{ij} \leq 0 \end{cases}$	$b_{ij}(x) = \begin{cases} -(1+x)a_{ij} & , \text{ falls } a_{ij} < 0 \\ -a_{ij} & , \text{ falls } a_{ij} \geq 0 \end{cases}$
Loser Bonus $\Gamma_{\text{LoB}}$	Verlierer zahlt nur $(1-x) a_{ij} $ statt $ a_{ij} $ und Gewinner erhält $ a_{ij} $	$a_{ij}(x) = \begin{cases} a_{ij} & , \text{ falls } a_{ij} > 0 \\ (1-x)a_{ij} & , \text{ falls } a_{ij} \leq 0 \end{cases}$	$b_{ij}(x) = \begin{cases} -a_{ij} & , \text{ falls } a_{ij} < 0 \\ -(1-x)a_{ij} & , \text{ falls } a_{ij} \geq 0 \end{cases}$
Bilateral Bonus $\Gamma_{\text{BiB}}$	Gewinner erhält $(1+\frac{1}{2}x) a_{ij} $ statt nur $ a_{ij} $ und Verlierer zahlt nur $(1-\frac{1}{2}x) a_{ij} $ statt $ a_{ij} $	$a_{ij}(x) = \begin{cases} (1+\frac{1}{2}x)a_{ij} & , \text{ falls } a_{ij} > 0 \\ (1-\frac{1}{2}x)a_{ij} & , \text{ falls } a_{ij} \leq 0 \end{cases}$	$b_{ij}(x) = \begin{cases} -(1+\frac{1}{2}x)a_{ij} & , \text{ falls } a_{ij} < 0 \\ -(1-\frac{1}{2}x)a_{ij} & , \text{ falls } a_{ij} \geq 0 \end{cases}$

Tabelle 2.1.: Definition der Auszahlungsmatrizen in den sechs betrachteten Manipulations-Szenarien



## 3. Phänomene bezüglich des Erwarteten Transfers

### 3.1. Resultate für $2 \times 2$ - Matrixspiele

Wir betrachten die sechs Szenarien aus Tabelle 2.1 (S. 24) für  $2 \times 2$  - Matrixspiele. In Abschnitt 3.1.1 wird an einem konkreten Spiel mit Spielwert  $\bar{v} = 0$  durchgerechnet, wie sich der Erwartete Transfer in den jeweiligen Szenarien ändert. Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird in der gesamten Arbeit die englische Schreibweise für Dezimalzahlen (mit einem Punkt anstatt eines Kommas) verwendet. Die allgemein gültigen Aussagen für faire  $2 \times 2$  - Matrixspiele werden dabei für die entsprechenden Szenarien bereits formuliert. Die Beweise für etwas schärfere Aussagen folgen in Abschnitt 3.1.2. Im abschließenden Abschnitt 3.1.3 werden verschiedenste interessante Bemerkungen und Beobachtungen zu Matrixspielen dieser Dimension aufgeführt, sowie einige experimentelle Ergebnisse vorgestellt.

#### 3.1.1. Beispielrechnung

Wir betrachten beispielhaft das folgende Matrixspiel als Ausgangsspiel.

**Spiel 3 (Standardbeispiel)**

$$\Gamma = (A, -A) \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Dieses Spiel ist nicht-degeneriert und besitzt auf Grund der vorliegenden Vorzeichenstruktur kein reines Nash-Gleichgewicht. Nach Satz 1.2.2 (S. 15) erhält man das eindeutige, gemischte Gleichgewicht  $(\bar{p}, \bar{q}) = ((p, 1 - p)^\top, (q, 1 - q)^\top)$  durch Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} -p + 3(1 - p) &= 2p - 6(1 - p) \\ q - 2(1 - q) &= -3q + 6(1 - q). \end{aligned}$$

Die beiden Gleichgewichts-Strategien für  $\Gamma$  sind in diesem Fall gegeben durch

$$(\bar{p}, \bar{q}) = \left( \left( \frac{3}{4}, \frac{1}{4} \right)^\top, \left( \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)^\top \right).$$

Mit Hilfe dieser Information lässt sich einerseits leicht nachrechnen, dass der Wert des Spiels  $\bar{v} = 0$  beträgt.

Andererseits kann man, gemäß Definition 2.1.1 (S. 20), den Erwarteten Transfer dieses Spiels bestimmen:

$$ET(\Gamma) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 6}{12} = 2.$$

Spielen in diesem Beispiel beide Kontrahenten ihre gemischte Gleichgewichts-Strategie, so kann jeder mit einer erwarteten Auszahlung von  $\bar{v} = 0$  rechnen. Bei sehr häufiger Ausführung des Spiels werden beide Spieler im Schnitt weder einen Gewinn einstreichen, noch einen Verlust verzeichnen. Hingegen wird durchschnittlich ein Transfer von 2 Einheiten zu erwarten sein. Im Mittel gehen also bei jeder Partie 2 Einheiten über den Tisch.

Nehmen wir nun an, eine dritte Instanz erhebt eine Spielsteuer von 10%, die der jeweilige Gewinner tragen muss. (An dieser Stelle sei bemerkt, dass innerhalb der gesamten Arbeit bei konkreten Beispielrechnungen ein Standard-Prozentsatz von  $x = 10\% = 0.1$  angenommen wird.) Dann verringern sich die positiven Einträge in den Auszahlungsmatrizen der beiden Spieler um eben diesen Steuersatz. Konkret erhält man für das betrachtete Spiel 3 das Bimatrixspiel  $\Gamma_{\text{wiT}}(x = 0.1) = (A(x = 0.1), B(x = 0.1))$  mit

$$A(x = 0.1) = \begin{pmatrix} 0.9 & -2 \\ -3 & 5.4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B(x = 0.1) = \begin{pmatrix} -1 & 1.8 \\ 2.7 & -6 \end{pmatrix}.$$

Wir interessieren uns für den Erwarteten Transfer dieses manipulierten Spiels. Dazu berechnen wir die Gleichgewichts-Strategien  $(\bar{p}(x = 0.1), \bar{q}(x = 0.1))$ . In der Tat ist in diesem Fall das Gleichgewicht ebenfalls eindeutig bestimmt und lässt sich, ähnlich wie im Ausgangsspiel, durch Lösen des folgenden Gleichungssystems bestimmen:

$$\begin{aligned} -p + \frac{27}{10}(1-p) &= \frac{18}{10}p - 6(1-p) \\ \frac{9}{10}q - 2(1-q) &= -3q + \frac{54}{10}(1-q). \end{aligned}$$

Das Spiel  $\Gamma_{\text{wiT}}(0.1)$  besitzt das Gleichgewicht

$$(\bar{p}(0.1), \bar{q}(0.1)) = \left( \left( \frac{87}{115}, \frac{28}{115} \right)^\top, \left( \frac{74}{113}, \frac{39}{113} \right)^\top \right).$$

Zum einen haben sich nun die erwarteten Auszahlungen der beiden Spieler geändert:

$$\bar{v}_1(0.1) = \bar{p}^\top(0.1)A(0.1)\bar{q}(0.1) = \begin{pmatrix} \frac{87}{115} & \frac{28}{115} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.9 & -2 \\ -3 & 5.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{74}{113} \\ \frac{39}{113} \end{pmatrix} = -\frac{57}{565} \approx -0.10088$$

und

$$\bar{v}_2(0.1) = \bar{p}^\top(0.1)B(0.1)\bar{q}(0.1) = \begin{pmatrix} \frac{87}{115} & \frac{28}{115} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1.8 \\ 2.7 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{74}{113} \\ \frac{39}{113} \end{pmatrix} = -\frac{57}{575} \approx -0.09913.$$

Beide Spieler müssen auf lange Sicht mit einem Verlust rechnen. Dabei ist der erwartete Verlust von Spieler 1 etwas höher als der erwartete Verlust von Spieler 2.

Zum anderen erfährt auch der Erwartete Transfer eine Änderung, was zunächst nicht verwunderlich erscheint. Die eigentliche Überraschung liegt in der Richtung der Änderung. Wie in Abschnitt 2.1 (ab S. 20) definiert, bestimmen wir den Erwarteten Transfer des besteuerten Spiels durch die folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} ET(\Gamma_{\text{WiT}}(x = 0.1)) &= \begin{pmatrix} \frac{87}{115} & \frac{28}{115} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{74}{113} \\ \frac{39}{113} \end{pmatrix} \\ &= \frac{87 \cdot 74 \cdot 1 + 87 \cdot 39 \cdot 2 + 28 \cdot 74 \cdot 3 + 28 \cdot 39 \cdot 6}{115 \cdot 113} \\ &= \frac{25992}{12995} = 2 + \frac{2}{12995} \approx 2.00015. \end{aligned}$$

Wir stellen fest, dass der Erwartete Transfer gestiegen ist! Im Schnitt gehen in dieser Situation, bevor die Steuerabgabe gezahlt wird, etwa 2.00015 Einheiten über den Tisch. Zugegeben, der Zuwachs ist sehr gering, dennoch ist dieses paradox erscheinende Phänomen vorhanden.

Betrachten wir nun für dieses Spiel das Szenario „Winner Tax“ mit einem beliebigen Steuersatz  $x \in [0, 1]$  (für  $x = 0$  erhalten wir dabei das Ausgangsspiel). Die Auszahlungsmatrizen im Bimatrixspiel  $\Gamma_{\text{WiT}}(x) = (A(x), B(x))$  haben die Gestalt

$$A(x) = \begin{pmatrix} (1-x) \cdot 1 & -2 \\ -3 & (1-x) \cdot 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B(x) = \begin{pmatrix} -1 & (1-x) \cdot 2 \\ (1-x) \cdot 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Auch in dieser allgemeineren Situation ist das Gleichgewicht des Bimatrixspiels eindeutig bestimmt. In Abhängigkeit des Steuersatzes  $x$  erhält man die Gleichgewichts-Strategien

$$(\bar{p}(x), \bar{q}(x)) = \left( \left( \frac{9-3x}{12-5x}, \frac{3-2x}{12-5x} \right)^\top, \left( \frac{8-6x}{12-7x}, \frac{4-x}{12-7x} \right)^\top \right).$$

Die erwarteten Auszahlungen der beiden Spieler sind gegeben durch

$$\bar{v}_1(x) = \frac{6x(x-2)}{12-7x} \quad \text{und} \quad \bar{v}_2(x) = \frac{6x(x-2)}{12-5x}.$$

Auch der Erwartete Transfer lässt sich berechnen:

$$ET(\Gamma_{\text{WiT}}(x)) = \frac{72(x-2)^2}{35x^2 - 144x + 144}.$$

Diese Funktion ist streng monoton wachsend in  $x \in [0, 1]$ . Für  $x = 0$  ergibt sich der Erwartete Transfer des Ausgangsspiels, mit  $ET(\Gamma) = ET(\Gamma_{\text{WiT}}(0)) = 2$ .

Wir stellen demnach fest, dass der Erwartete Transfer des besteuerten Spiels, für jeden Steuersatz  $x$ , größer als der Erwartete Transfer des Ausgangsspiels ist. Außerdem gilt: Je größer der Steuersatz  $x \in [0, 1]$ , umso größer ist auch der Erwartete Transfer im Steuermodell.

Dass dieses Phänomen für nicht-degenerierte  $2 \times 2$  - Matrixspiele mit Spielwert  $\bar{v} = 0$  keine zufällige Besonderheit darstellt, bestätigt das folgende Theorem.

**Theorem 3.1.1**

Für jedes faire, nicht-degenerierte  $2 \times 2$  - Matrixspiel  $\Gamma$  und jeden Steuersatz  $x \in (0, 1)$  gilt:

- (i) Das Bimatrixspiel  $\Gamma_{wiT}(x)$  hat genau ein Nash-Gleichgewicht.
- (ii)  $ET(\Gamma_{wiT}(x)) \geq ET(\Gamma)$ .
- (iii)  $ET(\Gamma_{wiT}(x))$  ist entweder streng monoton wachsend in  $x$  oder konstant.

Nun nehmen wir in einer anderen Situation, im Szenario „Loser Bonus“, an, dass nicht der Gewinner eine Abgabe zahlen muss, sondern der Verlierer einen Zuschuss erhält. Konkret soll der Verlierer aus dritter Hand einen Bonus, in Höhe von  $x$  Prozent seines Verlustes, zurück erstattet bekommen. Für einen Bonussatz von  $x = 0.1$  ergibt sich in unserem Beispiel das Bimatrixspiel  $\Gamma_{LoB}(0.1) = (A(0.1), B(0.1))$  mit

$$A(0.1) = \begin{pmatrix} 1 & -1.8 \\ -2.7 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B(0.1) = \begin{pmatrix} -0.9 & 2 \\ 3 & -5.4 \end{pmatrix}.$$

Die Gleichgewichts-Strategien dieses Bimatrixspiels sind erneut eindeutig bestimmt und gegeben durch

$$(\bar{p}(0.1), \bar{q}(0.1)) = \left( \left( \frac{84}{113}, \frac{29}{113} \right)^\top, \left( \frac{78}{115}, \frac{37}{115} \right)^\top \right).$$

Der Erwartete Transfer beträgt in diesem Fall

$$ET(\Gamma_{LoB}(0.1)) = \begin{pmatrix} \frac{84}{113} & \frac{29}{113} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{78}{115} \\ \frac{37}{115} \end{pmatrix} = \frac{25992}{12995} = 2 + \frac{2}{12995} \approx 2.00015.$$

Es fällt zunächst auf, dass der Erwartete Transfer auch für dieses Szenario im Vergleich zum Ausgangsspiel gestiegen ist. Doch wir beobachten noch ein weiteres bemerkenswertes und überraschendes Phänomen: Der Erwartete Transfer im Bonusszenario „Loser Bonus“ stimmt mit dem Erwarteten Transfer im Steuerszenario „Winner Tax“ exakt überein. Das folgende Theorem gibt Aufschluss über die Allgemeingültigkeit dieses Zusammenhangs im Fall von fairen, nicht-degenerierten  $2 \times 2$  - Matrixspielen.

**Theorem 3.1.2**

Für jedes faire, nicht-degenerierte  $2 \times 2$  - Matrixspiel  $\Gamma$  und jeden Steuer- bzw. Bonussatz  $x \in (0, 1)$  gilt:

- (i) Das Bimatrixspiel  $\Gamma_{LoB}(x)$  hat genau ein Nash-Gleichgewicht.
- (ii)  $ET(\Gamma_{LoB}(x)) = ET(\Gamma_{WiT}(x))$ .
- (iii)  $ET(\Gamma_{LoB}(x)) \geq ET(\Gamma)$ .
- (iv)  $ET(\Gamma_{LoB}(x))$  ist entweder streng monoton wachsend in  $x$  oder konstant.

Gemäß der Tabelle 2.1 (S. 24) kann man außerdem fragen, wie sich die Szenarien „Loser Tax“ und „Winner Bonus“ sowie die Szenarien „Bilateral Tax“ und „Bilateral Bonus“ auf den Erwarteten Transfer auswirken. Auch hier wird man für das obige Beispiel feststellen, dass der Erwartete Transfer im Vergleich zum Ausgangsspiel stets zunimmt.

Zur besseren Übersicht sind die Ergebnisse aus den sechs Szenarien, für das Spiel 3 mit dem Prozentsatz  $x = 0.1$ , in Tabelle 3.1 komplett dargestellt.

Szenario	$A$	$B$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{v}_1$	$\bar{v}_2$	$ET$
Matrix- spiel: $\Gamma$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$	0	0	2
Winner Tax: $\Gamma_{WiT}(0.1)$	$\begin{pmatrix} 0.9 & -2 \\ -3 & 5.4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 1.8 \\ 2.7 & -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{87}{115} \\ \frac{28}{115} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{74}{113} \\ \frac{39}{113} \end{pmatrix}$	$-\frac{57}{565}$ $\approx -0.10088$	$-\frac{57}{575}$ $\approx -0.09913$	$2 + \frac{2}{12995}$
Loser Bonus: $\Gamma_{LoB}(0.1)$	$\begin{pmatrix} 1 & -1.8 \\ -2.7 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.9 & 2 \\ 3 & -5.4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{84}{113} \\ \frac{29}{113} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{78}{115} \\ \frac{37}{115} \end{pmatrix}$	$\frac{57}{575}$ $\approx 0.09913$	$\frac{57}{565}$ $\approx 0.10088$	$2 + \frac{2}{12995}$
Loser Tax: $\Gamma_{LoT}(0.1)$	$\begin{pmatrix} 1 & -2.2 \\ -3.3 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.1 & 2 \\ 3 & -6.6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{96}{127} \\ \frac{31}{127} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{82}{125} \\ \frac{43}{125} \end{pmatrix}$	$-\frac{63}{625}$ $\approx -0.10080$	$-\frac{63}{635}$ $\approx -0.09921$	$2 + \frac{2}{15875}$
Winner Bonus: $\Gamma_{WiB}(0.1)$	$\begin{pmatrix} 1.1 & -2 \\ -3 & 6.6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2.2 \\ 3.3 & -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{93}{125} \\ \frac{32}{125} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{86}{127} \\ \frac{41}{127} \end{pmatrix}$	$\frac{63}{635}$ $\approx 0.09921$	$\frac{63}{625}$ $\approx 0.10080$	$2 + \frac{2}{15875}$
Bilateral Tax: $\Gamma_{BiT}(0.1)$	$\begin{pmatrix} 0.95 & -2.1 \\ -3.15 & 5.7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.05 & 1.9 \\ 2.85 & -6.3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{183}{242} \\ \frac{59}{242} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{78}{119} \\ \frac{41}{119} \end{pmatrix}$	$-\frac{12}{119}$ $\approx -0.10084$	$-\frac{12}{121}$ $\approx -0.09917$	$2 + \frac{2}{14399}$
Bilateral Bonus: $\Gamma_{BiB}(0.1)$	$\begin{pmatrix} 1.05 & -1.9 \\ -2.85 & 6.3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.95 & 2.1 \\ 3.15 & -5.7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{177}{238} \\ \frac{61}{238} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{82}{121} \\ \frac{39}{121} \end{pmatrix}$	$\frac{12}{121}$ $\approx 0.09917$	$\frac{12}{119}$ $\approx 0.10084$	$2 + \frac{2}{14399}$

Tabelle 3.1.: Ergebnisse für Spiel 3 (Standardbeispiel, S. 25) mit Steuer- bzw. Bonussatz  $x = 0.1$

Die Einträge in der Tabelle legen die Vermutung nahe, dass auch ein allgemeiner Zusammenhang zwischen den Szenarien „Loser Tax“ und „Winner Bonus“, bzw. zwischen den Szenarien „Bilateral Tax“ und „Bilateral Bonus“ besteht. Theorem 3.1.3 bzw. Theorem 3.1.4 liefern einerseits die Bestätigung, dass der Erwartete Transfer in diesen Szenarien jeweils übereinstimmt. Sie zeigen andererseits, dass die gleichen Eigenschaften wie schon für das Basiszenario „Winner Tax“ gelten.

**Theorem 3.1.3**

Für jedes faire, nicht-degenerierte  $2 \times 2$  - Matrixspiel  $\Gamma$  und jeden Steuer- bzw. Bonussatz  $x \in (0, 1)$  gilt:

- (i) Die Bimatrixspiele  $\Gamma_{LoT}(x)$  und  $\Gamma_{WiB}(x)$  haben jeweils genau ein Nash-Gleichgewicht.
- (ii)  $ET(\Gamma_{LoT}(x)) = ET(\Gamma_{WiB}(x))$ .
- (iii)  $ET(\Gamma_{LoT}(x)) = ET(\Gamma_{WiB}(x)) \geq ET(\Gamma)$ .
- (iv)  $ET(\Gamma_{LoT}(x)) = ET(\Gamma_{WiB}(x))$  ist entweder streng monoton wachsend in  $x$  oder konstant.

**Theorem 3.1.4**

Für jedes faire, nicht-degenerierte  $2 \times 2$  - Matrixspiel  $\Gamma$  und jeden Steuer- bzw. Bonussatz  $x \in (0, 1)$  gilt:

- (i) Die Bimatrixspiele  $\Gamma_{BiT}(x)$  und  $\Gamma_{BiB}(x)$  haben jeweils genau ein Nash-Gleichgewicht.
- (ii)  $ET(\Gamma_{BiT}(x)) = ET(\Gamma_{BiB}(x))$ .
- (iii)  $ET(\Gamma_{BiT}(x)) = ET(\Gamma_{BiB}(x)) \geq ET(\Gamma)$ .
- (iv)  $ET(\Gamma_{BiT}(x)) = ET(\Gamma_{BiB}(x))$  ist entweder streng monoton wachsend in  $x$  oder konstant.

Weiterhin könnte man auf Grundlage der Ergebnisse aus Tabelle 3.1 vermuten, dass für festes  $x \in (0, 1)$  der Erwartete Transfer in den Szenarien „Loser Tax“ und „Winner Bonus“ stets geringer ist als in den Szenarien „Bilateral Tax“ und „Bilateral Bonus“ und jener wiederum stets kleiner ist als in den Szenarien „Winner Tax“ und „Loser Bonus“. Dieser Sachverhalt ist Inhalt des Theorems 3.1.5.

**Theorem 3.1.5**

Für jedes faire, nicht-degenerierte  $2 \times 2$  - Matrixspiel  $\Gamma$  und jeden Steuer- bzw. Bonussatz  $x \in (0, 1)$  gilt die folgende Ungleichungskette:

$$\begin{aligned} ET(\Gamma_{WiT}(x)) &= ET(\Gamma_{LoB}(x)) \geq ET(\Gamma_{BiT}(x)) = ET(\Gamma_{BiB}(x)) \\ &\geq ET(\Gamma_{LoT}(x)) = ET(\Gamma_{WiB}(x)) \geq ET(\Gamma). \end{aligned}$$

Die nachfolgende Abbildung 3.1 veranschaulicht alle Aussagen für unser Standardbeispiel, das Spiel 3. Man kann darin den Erwarteten Transfer aller Szenarien, in Abhängigkeit vom Prozentsatz  $x \in [0, 1]$ , ablesen.

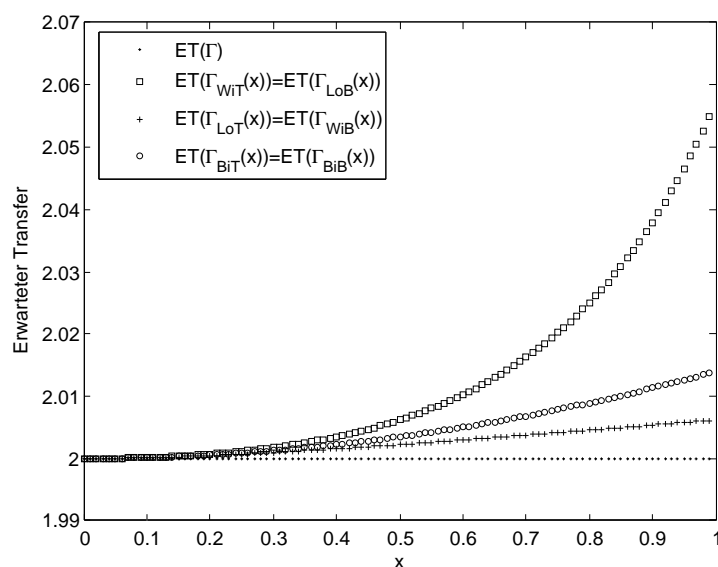


Abbildung 3.1.: Erwarteter Transfer in den sechs Szenarien für Spiel 3 (S. 25), in Abhängigkeit vom Prozentsatz  $x$

### 3.1.2. Theoreme und Beweise

Im Folgenden werden die Theoreme 3.1.1 - 3.1.5 bewiesen. Wir zeigen sogar noch etwas mehr. Dazu unterteilen wir die Menge  $M$  aller fairen, nicht-degenerierten  $2 \times 2$ -Matrixspiele in zwei disjunkte Teilmengen. Wir definieren das folgende Spiel, das, wie wir sehen werden, einen Sonderfall darstellt. In der Literatur ist es unter dem Namen „Matching Pennies“ [EK 2010, S. 174] bekannt. Beide Spieler haben eine Münze und entscheiden, ob sie Kopf oder Zahl zeigen. Zeigen beide Spieler das Gleiche, so bekommt Spieler 1 die Münze von Spieler 2. Andernfalls verliert Spieler 1 seine Münze an Spieler 2.

#### Spiel 4 (Matching Pennies)

$$\Gamma = (A, -A) \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sei

$$M = \{\Gamma = (A, -A) \mid \Gamma \text{ ist faires, nicht-degeneriertes } 2 \times 2 \text{- Matrixspiel}\}.$$

Die Menge  $M_1 \subset M$  enthalte alle fairen, nicht-degenerierten  $2 \times 2$ -Matrixspiele mit reinem Nash-Gleichgewicht, sowie alle nicht-degenerierten Vielfachen des Spiels 4:

$$M_1 = \{\Gamma \in M \mid \Gamma \text{ hat reines Gleichgewicht}\} \cup \left\{ \Gamma = (\lambda A, -\lambda A) \mid A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Die Menge  $M_2 \subset M$  enthalte den verbleibenden Teil der fairen, nicht-degenerierten  $2 \times 2$  - Matrixspiele, d.h. alle Spiele mit gemischtem Gleichgewicht außer den nicht-degenerierten Vielfachen des Spiels 4:

$$M_2 = \{\Gamma \in M \mid \Gamma \text{ hat gemischtes Gleichgewicht}\} \setminus M_1.$$

**Theorem 3.1.6**

Für jedes Matrixspiel  $\Gamma \in M_1$  und jeden Steuer- bzw. Bonussatz  $x \in [0, 1)$  gilt:

- (i) Die Bimatrixspiele  $\Gamma_{WiT}(x)$ ,  $\Gamma_{LoB}(x)$ ,  $\Gamma_{LoT}(x)$ ,  $\Gamma_{WiB}(x)$ ,  $\Gamma_{BiT}(x)$  und  $\Gamma_{BiB}(x)$  haben jeweils genau ein Nash-Gleichgewicht.
- (ii) 
$$\begin{aligned} ET(\Gamma_{WiT}(x)) &= ET(\Gamma_{LoB}(x)) = ET(\Gamma_{LoT}(x)) = ET(\Gamma_{WiB}(x)) \\ &= ET(\Gamma_{BiT}(x)) = ET(\Gamma_{BiB}(x)) = ET(\Gamma) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{falls } \Gamma \text{ ein reines Gleichgewicht besitzt} \\ \lambda, & \text{falls } \Gamma \text{ das } \lambda\text{-fache des Spiels 4 ist } (\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \end{cases} \end{aligned}$$

**Theorem 3.1.7**

Für jedes Matrixspiel  $\Gamma \in M_2$  und jeden Steuer- bzw. Bonussatz  $x \in [0, 1]$  gilt:

- (i) Die Bimatrixspiele  $\Gamma_{WiT}(x)$ ,  $\Gamma_{LoB}(x)$ ,  $\Gamma_{LoT}(x)$ ,  $\Gamma_{WiB}(x)$ ,  $\Gamma_{BiT}(x)$  und  $\Gamma_{BiB}(x)$  haben jeweils genau ein Nash-Gleichgewicht.
- (ii) 
$$\begin{aligned} ET(\Gamma_{WiT}(x)) &= ET(\Gamma_{LoB}(x)). \\ ET(\Gamma_{LoT}(x)) &= ET(\Gamma_{WiB}(x)). \\ ET(\Gamma_{BiT}(x)) &= ET(\Gamma_{BiB}(x)). \end{aligned}$$
- (iii)  $ET(\Gamma_{WiT}(x))$ ,  $ET(\Gamma_{LoB}(x))$ ,  $ET(\Gamma_{LoT}(x))$ ,  $ET(\Gamma_{WiB}(x))$ ,  $ET(\Gamma_{BiT}(x))$  und  $ET(\Gamma_{BiB}(x))$  sind streng monoton wachsend in  $x$ .
- (iv)  $ET(\Gamma_{WiT}(x)) > ET(\Gamma_{BiT}(x)) > ET(\Gamma_{LoT}(x)) > ET(\Gamma)$ , für  $x \in (0, 1]$ .  
 $ET(\Gamma_{WiT}(x)) = ET(\Gamma_{BiT}(x)) = ET(\Gamma_{LoT}(x)) = ET(\Gamma)$ , für  $x = 0$ .

Wir beginnen mit einer Hilfsaussage, bevor in einem Beweis die Theoreme 3.1.6 und 3.1.7 verifiziert werden. Aus deren Gültigkeit folgen unmittelbar die Aussagen aus den Theoremen 3.1.1 - 3.1.5.

**Lemma 3.1.8**

Für alle  $p, q \in (0, 1)$  gilt:  $(p(1 - q) + q(1 - p)) \in (0, 1)$ .

*Beweis.*  $p(1 - q) + q(1 - p) > 0$  offensichtlich.

$p(1 - q) + q(1 - p) < p + (1 - p) = 1$ . ■



*Beweis (der Theoreme 3.1.6 und 3.1.7).* Sei  $\Gamma = (A, -A)$  mit  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  und  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$ . Da  $\Gamma$  ein nicht-degeneriertes Spiel ist, ist mindestens ein Eintrag der Matrix  $A$  nicht Null. Sei, wegen Satz 1.2.7 (S. 17), o.B.d.A.  $a_{11} = 1$ . (Das Spiel  $\Gamma = (-A, A)$  ist im Prinzip das Gleiche wie das Spiel  $\Gamma = (A^\top, -A^\top)$ , weil dabei nur die Rollen der Spieler vertauscht sind. Auch die Gleichgewichts-Strategien werden nur vertauscht.)

Wir unterscheiden 2 Fälle nach der Mächtigkeit der Trägermengen (siehe Satz 1.2.6 auf S. 16) der Gleichgewichts-Strategien  $(\bar{p}, \bar{q})$ . Zuerst betrachten wir in einem Nebenfall die Matrixspiele mit reinem Gleichgewicht. Der sich anschließende Hauptfall behandelt die Matrixspiele mit gemischtem Gleichgewicht.

**Nebenfall:** Wir überprüfen die Aussagen für Ausgangsspiele mit reinem Gleichgewicht. Es ergeben sich drei Unterfälle, von denen der erste am Beispiel des Szenarios „Winner Tax“ detailliert diskutiert wird. Die Argumentation für die anderen Fälle und Szenarien verläuft analog.

Sei  $(\bar{p}, \bar{q})$  Gleichgewicht des fairen Spiels  $\Gamma$  mit  $|\text{supp}(\bar{p})| = |\text{supp}(\bar{q})| = 1$ . Spielt Spieler 1 stets Zeile  $i$  und Spieler 2 stets Spalte  $j$ , so muss wegen der Eindeutigkeit des Spielwertes in Matrixspielen gelten:  $a_{ij} = \bar{v} = 0$ .

**Nebenfall 1 :** Sei  $\bar{p} = (1, 0)^\top, \bar{q} = (0, 1)^\top, a_{12} = 0$ , d.h.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ .

Damit das Spiel einerseits nicht-degeneriert ist, und andererseits das eindeutige Nash-Gleichgewicht  $(\bar{p}, \bar{q}) = ((1, 0)^\top, (0, 1)^\top)$  besitzt, muss gelten:

$$a_{22} < 0, a_{21} \in \mathbb{R} \setminus \{a_{22}, 1\}.$$

Sei  $x \in [0, 1)$  beliebig. Das Szenario „Winner Tax“ liefert das Bimatrixspiel  $\Gamma_{\text{WiT}}(x) = (A(x), B(x))$  mit

$$A(x) = \begin{pmatrix} (1-x) & 0 \\ a_{21}(x) & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ b_{21}(x) & -(1-x)a_{22} \end{pmatrix}.$$

Dieses Spiel ist nicht-degeneriert, denn andernfalls würde es zwei beste Antworten auf eine gespielte reine Strategie eines Spielers geben:

- Annahme: Spieler 2 spielt Spalte 1 und Spieler 1 hat zwei beste Antworten. Dann gilt:  $(1-x) = a_{21}(x) > 0$ . Es folgt der Widerspruch  $1 = a_{21}$ .
- Annahme: Spieler 2 spielt Spalte 2 und Spieler 1 hat zwei beste Antworten. Dann gilt:  $0 = a_{22}$ . Dies ist ein Widerspruch zu  $a_{22} < 0$ .
- Annahme: Spieler 1 spielt Zeile 1 und Spieler 2 hat zwei beste Antworten. Dann gilt:  $-1 = 0$ . Das ist ein Widerspruch.
- Annahme: Spieler 1 spielt Zeile 2 und Spieler 2 hat zwei beste Antworten. Dann gilt:  $b_{21}(x) = -(1-x)a_{22} > 0$ . Es folgt der Widerspruch  $a_{21} = a_{22}$ .

Man prüft leicht, dass das Bimatrixspiel  $\Gamma_{\text{WiT}}(x)$  ebenso das reine Gleichgewicht  $(\bar{p}(x), \bar{q}(x)) = ((1, 0)^\top, (0, 1)^\top)$  besitzt.

Als zweites reines Gleichgewicht käme nur in Frage:  $\bar{p} = (0, 1)^\top, \bar{q} = (1, 0)^\top$ . Dann müsste aber einerseits gelten  $a_{21}(x) > (1-x) > 0$  und insbesondere  $a_{21} > 0$ . Andererseits müsste aber auch  $b_{21}(x) > -(1-x)a_{22} > 0$  und insbesondere  $a_{21} < 0$  erfüllt sein, was zum Widerspruch führt.

Da ein nicht-degeneriertes  $2 \times 2$  - Bimatrixspiel, nach Satz 1.2.5 (S. 16), nur ein oder drei Gleichgewichte haben kann, ist das Gleichgewicht für  $\Gamma_{\text{WiT}}(x)$  eindeutig bestimmt und Aussage (i) aus Theorem 3.1.6 ist für das Szenario „Winner Tax“ gezeigt.

Die Aussage (ii) aus Theorem 3.1.6 folgt nun für  $\Gamma_{\text{WiT}}(x)$  unmittelbar, mit

$$ET(\Gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = ET(\Gamma_{\text{WiT}}(x)) = 0.$$

**Nebenfall 2 :** Sei  $\bar{p} = (0, 1)^\top, \bar{q} = (1, 0)^\top, a_{21} = 0$ , d.h.  $A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$ .

Dieser Fall führt zum Widerspruch, da  $a_{11} = 1 > 0 = a_{21}$  und daher  $\bar{p} = (0, 1)^\top$  keine beste Antwort auf  $\bar{q} = (1, 0)^\top$  ist.

**Nebenfall 3 :** Sei  $\bar{p} = (0, 1)^\top, \bar{q} = (0, 1)^\top, a_{22} = 0$ , d.h.  $A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}$ .

Damit das Spiel einerseits nicht-degeneriert ist, und andererseits das eindeutige Gleichgewicht  $(\bar{p}, \bar{q}) = ((0, 1)^\top, (0, 1)^\top)$  besitzt, muss gelten:

$$a_{12} < 0, a_{21} > 0, a_{21} \neq 1.$$

Der Beweis für die Aussagen in Theorem 3.1.6 verläuft wie im Nebenfall 1.

Entscheidend für alle Nebenfälle ist, dass die **Vorzeichenstruktur** des Ausgangsspiels (für jedes der sechs Szenarien) erhalten bleibt und das resultierende Bimatrixspiel nicht degeneriert sein kann, solange der prozentuale Steuer- bzw. Bonussatz der sechs Szenarien im Intervall  $[0, 1)$  liegt. Das eindeutige, reine Nash-Gleichgewicht bleibt stets erhalten und der Erwartete Transfer ist in allen Fällen gleich Null. Ließen wir hier  $x = 1$  zu, so könnte man Beispiele konstruieren, in denen die manipulierten Spiele degeneriert sind.

**Hauptfall:** Sei  $(\bar{p}, \bar{q})$  gemischtes Gleichgewicht, d.h.  $|\text{supp}(\bar{p})| = |\text{supp}(\bar{q})| = 2$ .

Der Zeilenspieler spiele die gemischte Gleichgewichts-Strategie  $\bar{p} = (p, 1-p)^\top$  mit  $p \in (0, 1)$ . Der Spaltenspieler spiele die gemischte Gleichgewichts-Strategie  $\bar{q} = (q, 1-q)^\top$  mit  $q \in (0, 1)$ . Außerdem soll das Spiel den Wert  $\bar{v} = 0$  haben. Da wir weiterhin o.B.d.A.  $a_{11} = 1$  annehmen, sind die vier Freiheitsgrade des  $2 \times 2$ -Matrixspiels vorgegeben durch:  $p, q, \bar{v} = 0$  und  $a_{11} = 1$ . Es verbleiben also nur zwei „echte“ Freiheitsgrade:  $p, q \in (0, 1)$ .

Für  $A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  muss, nach Satz 1.2.8 (S. 17), das folgende Gleichungssystem erfüllt sein:

$$\begin{aligned} -p - (1-p)a_{21} &= 0 \\ -p a_{12} - (1-p)a_{22} &= 0 \\ q + (1-q)a_{12} &= 0 \\ q a_{21} + (1-q)a_{22} &= 0. \end{aligned}$$

Wir erhalten:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{q}{1-q} \\ -\frac{p}{1-p} & \frac{pq}{(1-p)(1-q)} \end{pmatrix}.$$

Wegen  $p, q \in (0, 1)$ , ist das Matrixspiel  $\Gamma = (A, -A)$  auf Grund der gegebenen **Vorzeichenstruktur** nicht-degeneriert und besitzt das eindeutige Gleichgewicht

$$(\bar{p}, \bar{q}) = \left( (p, 1-p)^\top, (q, 1-q)^\top \right).$$

Für den Erwarteten Transfer gilt

$$ET(\Gamma) = \begin{pmatrix} p & 1-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{q}{1-q} \\ \frac{p}{1-p} & \frac{pq}{(1-p)(1-q)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} = 4pq.$$

Sei  $x \in [0, 1]$  beliebig. Das Szenario „Winner Tax“ liefert das Bimatrixspiel  $\Gamma_{\text{WiT}}(x) = (A(x), B(x))$  mit

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & -\frac{q}{1-q} \\ -\frac{p}{1-p} & (1-x)\frac{pq}{(1-p)(1-q)} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B(x) = \begin{pmatrix} -1 & (1-x)\frac{q}{1-q} \\ (1-x)\frac{p}{1-p} & -\frac{pq}{(1-p)(1-q)} \end{pmatrix}.$$

Auch dieses Spiel ist auf Grund der erhalten gebliebenen Vorzeichenstruktur nicht-degeneriert. Für jedes Nash-Gleichgewicht  $(\bar{p}(x), \bar{q}(x))$  von  $\Gamma_{\text{WiT}}(x)$  muss, nach Satz 1.2.6 (S. 16), gelten:  $|\text{supp}(\bar{p}(x))| = |\text{supp}(\bar{q}(x))|$ .

Wegen der Vorzeichenstruktur kann  $\Gamma_{\text{WiT}}(x)$  kein reines Gleichgewicht besitzen. Das Spiel hat folglich ein eindeutig bestimmtes, gemischtes Gleichgewicht.

Die Argumentation über die Eindeutigkeit des Gleichgewichts für die Spiele  $\Gamma_{\text{LoB}}(x)$ ,  $\Gamma_{\text{LoT}}(x)$ ,  $\Gamma_{\text{WiB}}(x)$ ,  $\Gamma_{\text{BiT}}(x)$  und  $\Gamma_{\text{BiB}}(x)$  verläuft analog. Damit ist Aussage (i) aus Theorem 3.1.7 gezeigt.

Wir zeigen die Aussagen (ii) und (iii) des Theorems 3.1.7 exemplarisch für die Spiele  $\Gamma_{\text{WiT}}(x)$  und  $\Gamma_{\text{LoB}}(x)$ . Gemäß Algorithmus 1 (S. 16) berechnen wir die entsprechenden Gleichgewichte  $(\bar{p}(x), \bar{q}(x))$  durch Lösen der Gleichungen

$$\begin{aligned}(B^\top(x) p(x))_1 &= (B^\top(x) p(x))_2 \\ (A(x) q(x))_1 &= (A(x) q(x))_2.\end{aligned}$$

Anschließend bestimmen wir den Erwarteten Transfer des jeweiligen Bimatrixspiels. Zur besseren Übersicht stellen wir die Ergebnisse in der folgenden Tabelle dar. Für die beiden Szenarien „Winner Tax“ und „Loser Bonus“ folgt die Aussage (ii), d.h. die Gleichheit  $ET(\Gamma_{\text{WiT}}(x)) = ET(\Gamma_{\text{LoB}}(x))$ , unmittelbar.

Spiel	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$ET$
$\Gamma$	$\begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix}$	$4pq$
$\Gamma_{\text{WiT}}(x)$	$\begin{pmatrix} -\frac{p-px+pqx}{px+qx-2pqx-1} \\ \frac{p+qx-pqx-1}{px+qx-2pqx-1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{q-pqx}{px+qx-2pqx+1-x} \\ \frac{px+qx-pqx-q-x+1}{px+qx-2pqx+1-x} \end{pmatrix}$	$\frac{-pq(x-2)^2}{x^2(p+q-2pq)(p+q-2pq-1)+x-1}$
$\Gamma_{\text{LoB}}(x)$	$\begin{pmatrix} \frac{p-pqx}{px+qx-2pqx+1-x} \\ \frac{px+qx-pqx-p-x+1}{px+qx-2pqx+1-x} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{q-qx+pqx}{px+qx-2pqx-1} \\ \frac{q+px-pqx-1}{px+qx-2pqx-1} \end{pmatrix}$	$\frac{-pq(x-2)^2}{x^2(p+q-2pq)(p+q-2pq-1)+x-1}$

Tabelle 3.2.: Erwarteter Transfer für faire, nicht-degenerierte  $2 \times 2$  - Matrixspiele mit gemischtem Gleichgewicht und die Szenarien „Winner Tax“, „Loser Bonus“

Der Erwartete Transfer  $ET(\Gamma_{\text{WiT}}(x)) = ET(\Gamma_{\text{LoB}}(x))$  ist stetig differenzierbar in  $x \in [0, 1]$ . Um Aussage (iii) zu zeigen, beweisen wir, dass die erste Ableitung

$$\frac{d ET(\Gamma_{\text{WiT}}(x))}{d x} = \frac{-pqx(x-2)(4(p+q-2pq)(p+q-2pq-1)+1)}{(x^2(p+q-2pq)(p+q-2pq-1)+x-1)^2}$$

für alle  $x \in (0, 1]$  stets positiv oder, im Fall  $p = q = \frac{1}{2}$ , konstant Null ist.

Es gilt:

$$\begin{aligned}\frac{d ET(\Gamma_{\text{WiT}}(x))}{d x} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow -pqx(x-2)(4(p+q-2pq)(p+q-2pq-1)+1) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (p+q-2pq)(p+q-2pq-1) &\geq -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist erfüllt, da  $(p+q-2pq) \in (0, 1)$  (nach Lemma 3.1.8 auf S. 32) und die Funktion  $f(z) = z(z-1)$  auf  $(0, 1)$  ihr Minimum im Punkt  $(z, f(z)) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$  annimmt.

Für die Spiele mit gemischtem Gleichgewicht bemerken wir, dass nur im Fall  $p = q = \frac{1}{2}$  der Erwartete Transfer in den Bimatrixsituationen für alle  $x \in [0, 1]$  konstant ist und mit dem Erwarteten Transfer des Ausgangsspiels übereinstimmt. Das Spiel 4 (Matching Pennies, S. 31) nimmt daher eine Sonderstellung ein. Man rechnet leicht nach, dass der Erwartete Transfer für dieses Spiel in allen Szenarien stets 1 beträgt.

Die Aussage (iii) des Theorems 3.1.7 und Aussage (ii) des Theorems 3.1.6 ist somit für die Szenarien „Winner Tax“ und „Loser Bonus“ gezeigt.

Der Beweis für die anderen Szenarien verläuft völlig analog. In Anhang A.1.1 (ab S. 77) findet man in den Tabellen A.1 - A.3 die vollständigen Ergebnisse für faire, nicht-degenerierte  $2 \times 2$ -Matrixspiele mit gemischtem Gleichgewicht. Für die sechs Szenarien sind die Auszahlungsmatrizen, die Gleichgewichtsstrategien, die erwarteten Auszahlungen sowie der Erwartete Transfer (mit Ableitung und relativer Steigung) angegeben.

Diese Resultate, sowie die Ergebnisse aus Tabelle 3.2 wurden mit Hilfe der Software Matlab erstellt. Das Gleiche gilt für die Ergebnisse im Fall von symmetrischen  $3 \times 3$ -Matrixspielen. (Siehe dazu auch die Informationen in Anhang A.4 (S. 101) und den Quellcode auf der beigefügten CD.)

An dieser Stelle begnügen wir uns damit, den Erwarteten Transfer für die jeweiligen Szenarien, in Abhängigkeit des Prozentsatzes  $x$ , anzugeben. Daraus resultiert sofort Aussage (ii) des Theorems 3.1.7.

$$ET(\Gamma_{\text{WiT}}(x)) = ET(\Gamma_{\text{LoB}}(x)) = \frac{-pq(x-2)^2}{x^2(p+q-2pq)(p+q-2pq-1) + x - 1}$$

$$ET(\Gamma_{\text{LoT}}(x)) = ET(\Gamma_{\text{WiB}}(x)) = \frac{pq(x+2)^2}{-x^2(p+q-2pq)(p+q-2pq-1) + x + 1}$$

$$ET(\Gamma_{\text{BiT}}(x)) = ET(\Gamma_{\text{BiB}}(x)) = \frac{4pq}{x(2p+2q-4pq-1) + 2} - \frac{4pq}{x(2p+2q-4pq-1) - 2}$$

Die Beweise zur strengen Monotonie des Erwarteten Transfers in  $x$  für die hier nicht behandelten Szenarien findet man in Anhang A.1.2 (S. 80).

Schlussendlich zeigen wir Aussage (iv) des Theorems 3.1.7 in drei Schritten. Wir schließen den Fall  $p = q = \frac{1}{2}$ , d.h. das Spiel 4 (Matching Pennies, S. 31) aus. Der Fall  $x = 0$  ist offensichtlich. Sei  $x \in (0, 1]$  beliebig.

1. Zeige:  $ET(\Gamma_{\text{WiT}}(x)) - ET(\Gamma_{\text{BiT}}(x)) > 0$ .

$$\begin{aligned}
 & ET(\Gamma_{\text{WiT}}(x)) - ET(\Gamma_{\text{BiT}}(x)) \\
 &= \frac{pqx^3(2p-1)^2(2q-1)^2(x-4)}{(x(p+q-2pq)-1)(x(1-2(p+q-2pq))+2)(x(p+q-2pq-1)+1)(x(2(p+q-2pq)-1)+2)} > 0, \text{ denn} \\
 &\bullet pqx^3(2p-1)^2(2q-1)^2(x-4) < 0 \text{ offensichtlich,} \\
 &\bullet \underbrace{x}_{\in(0,1]} \underbrace{(p+q-2pq)}_{\in(0,1) \text{ nach L. 3.1.8}} - 1 < 0, \\
 &\bullet \underbrace{x}_{\in(0,1]} \underbrace{(1-2(p+q-2pq))}_{\in(-1,1) \text{ nach L. 3.1.8}} + 2 > 0, \\
 &\bullet \underbrace{x}_{\in(0,1]} \underbrace{((p+q-2pq)-1)}_{\in(-1,0) \text{ nach L. 3.1.8}} + 1 > 0, \\
 &\bullet \underbrace{x}_{\in(0,1]} \underbrace{(2(p+q-2pq)-1)}_{\in(-1,1) \text{ nach L. 3.1.8}} + 2 > 0.
 \end{aligned}$$

2. Zeige:  $ET(\Gamma_{\text{BiT}}(x)) - ET(\Gamma_{\text{LoT}}(x)) > 0$ .

$$\begin{aligned}
 & ET(\Gamma_{\text{BiT}}) - ET(\Gamma_{\text{LoT}}(x)) \\
 &= \frac{pqx^3(2p-1)^2(2q-1)^2(x+4)}{(x(p+q-2pq)+1)(x(1-2(p+q-2pq))+2)(x(1-(p+q-2pq))+1)(x(2(p+q-2pq)-1)+2)} > 0, \text{ denn} \\
 &\bullet pqx^3(2p-1)^2(2q-1)^2(x+4) > 0 \text{ offensichtlich,} \\
 &\bullet \underbrace{x}_{\in(0,1]} \underbrace{(p+q-2pq)}_{\in(0,1) \text{ nach L. 3.1.8}} + 1 > 0, \\
 &\bullet \underbrace{x}_{\in(0,1]} \underbrace{(1-2(p+q-2pq))}_{\in(-1,1) \text{ nach L. 3.1.8}} + 2 > 0, \\
 &\bullet \underbrace{x}_{\in(0,1]} \underbrace{(1-(p+q-2pq))}_{\in(0,1) \text{ nach L. 3.1.8}} + 1 > 0, \\
 &\bullet \underbrace{x}_{\in(0,1]} \underbrace{(2(p+q-2pq)-1)}_{\in(-1,1) \text{ nach L. 3.1.8}} + 2 > 0.
 \end{aligned}$$

3. Zeige:  $ET(\Gamma_{\text{LoT}}(x)) - ET(\Gamma) > 0$ .

$$\begin{aligned}
 & ET(\Gamma_{\text{LoT}}(x)) - ET(\Gamma) \\
 &= \frac{pqx^2(2p-1)^2(2q-1)^2}{(x(p+q-2pq)+1)(1-x(p+q-2pq-1))} > 0, \text{ denn} \\
 &\bullet pqx^2(2p-1)^2(2q-1)^2 > 0 \text{ offensichtlich,} \\
 &\bullet \underbrace{x}_{>0} \underbrace{(p+q-2pq)}_{\in(0,1) \text{ nach Lemma}} + 1 > 0, \\
 &\bullet 1 - \underbrace{x}_{\in(0,1]} \underbrace{((p+q-2pq)-1)}_{\in(-1,0) \text{ nach L. 3.1.8}} > 0.
 \end{aligned}$$

Damit ist auch Aussage (iv) des Theorems 3.1.7 gezeigt. ■

### 3.1.3. Bemerkungen, Gegenbeispiel und experimentelle Ergebnisse

#### Bemerkung 3.1.9 (Beziehung „Winner Tax“ und „Winner Bonus“)

Wir haben gesehen, dass die Szenarien „Winner Tax“ und „Loser Bonus“, bzw. die Szenarien „Loser Tax“ und „Winner Bonus“ in einem direkten Zusammenhang stehen, weil sie jeweils den gleichen Erwarteten Transfer liefern (siehe Theoreme 3.1.6, 3.1.7 auf S. 32).

Es gibt aber auch einen Zusammenhang zwischen den Szenarien „Winner Tax“ und „Winner Bonus“. Sei  $\Gamma = (A, -A)$  ein faires, nicht-degeneriertes Matrixspiel mit gemischtem Gleichgewicht. Weiter sei  $x \in [0, 1]$  ein Prozentsatz und die Matrizen  $A(x), B(x)$  seien gegeben durch

$$a_{ij}(x) = \begin{cases} (1-x)a_{ij} & , \text{ falls } a_{ij} > 0 \\ a_{ij} & , \text{ falls } a_{ij} \leq 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad b_{ij}(x) = \begin{cases} -(1-x)a_{ij} & , \text{ falls } a_{ij} < 0 \\ -a_{ij} & , \text{ falls } a_{ij} \geq 0 \end{cases}.$$

Außerdem betrachten wir die folgende Formel für den Erwarteten Transfer (siehe Beweis zu Theorem 3.1.7 auf S. 37):

$$ET(x) = \frac{-pq(x-2)^2}{x^2(p+q-2pq)(p+q-2pq-1) + x - 1}.$$

Für  $x \in (0, 1]$  ergibt sich die Situation aus dem Steuerszenario „Winner Tax“, und für  $x \in [-1, 0)$  ergibt sich die Situation aus dem Bonusszenario „Winner Bonus“. Wir erkennen die Matrizen aus den Bimatrixspielen und den Erwarteten Transfer für das jeweilige Szenario mit

$$ET(x) = ET(\Gamma_{\text{WiT}}(x)) = ET(\Gamma_{\text{WiB}}(-x)).$$

Die Funktion  $ET(x)$  ist stetig differenzierbar auf  $[-1, 1]$ . Sie hat ein lokales Minimum in  $x = 0$ , ist monoton fallend auf  $[-1, 0)$  und wachsend auf  $(0, 1]$ .

Die folgende Abbildung 3.2 illustriert den Zusammenhang für unser Standardbeispiel (Spiel 3, S. 25) mit  $p = \frac{3}{4}$  und  $q = \frac{2}{3}$ . Wir sehen obige Funktion  $ET(x)$ , in Abhängigkeit von  $x \in [-1, 1]$ . Im Vergleich zur Abbildung 3.1 (S. 31) sehen wir den Erwarteten Transfer  $ET(\Gamma_{\text{WiB}}(x))$  gespiegelt an der Ordinatenachse.

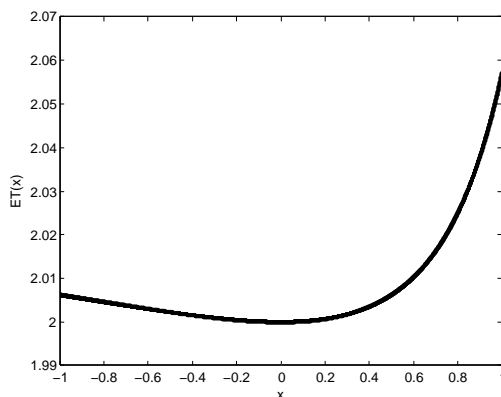


Abbildung 3.2.: Zusammenhang des Erwarteten Transfers in den Szenarien „Winner Tax“ und „Winner Bonus“ für Spiel 3 (S. 25)

Wegen der Definition aus Tabelle 2.1 (S. 24) und Theorem 3.1.7 (ii) (S. 32) gilt die gleiche Beziehung auch für die Modelle „Loser Tax“ und „Loser Bonus“.

**Bemerkung 3.1.10 (relativer Zuwachs im Erwarteten Transfer)**

In der Beispielrechnung für Spiel 3 haben wir gesehen, dass der Zuwachs im Erwarteten Transfer ziemlich klein ist (siehe Tabelle 3.1 auf S. 29). Man kann fragen, wie groß die relative Zunahme höchstens sein kann.

Wir wissen, dass der Erwartete Transfer monoton wachsend oder konstant in  $x \in [0, 1]$  ist. Für die fairen, nicht-degenerierten Spiele mit gemischtem Gleichgewicht analysieren wir, wie groß der Quotient aus dem Erwarteten Transfer beim Manipulationsatz  $x = 1$  und dem Erwarteten Transfer des Ausgangsspiels (bei  $x = 0$ ) maximal werden kann. Wegen der Übereinstimmungen aus Aussage (ii) in Theorem 3.1.7 (S. 32) betrachten wir nur die Steuerszenarien.

Für das Szenario „Loser Tax“ gilt

$$\frac{ET(\Gamma_{\text{LoT}}(1))}{ET(\Gamma)} = \frac{9}{4} \left( \frac{1}{2 - (p+q-2pq)(p+q-2pq-1)} \right).$$

Der Term  $(p+q-2pq)$  nimmt für  $p, q \in (0, 1)$  Werte aus  $(0, 1)$  an. Die Funktion  $f(z) = \frac{9}{4} \left( \frac{1}{2-z(z-1)} \right)$  wird im Intervall  $(0, 1)$  maximal für  $z \downarrow 0$  und  $z \uparrow 1$ , mit

$$\lim_{z \downarrow 0} f(z) = \lim_{z \uparrow 1} f(z) = \frac{9}{8}.$$

Die Funktion nimmt ihr Minimum in  $z = \frac{1}{2}$  an, mit  $f(z) = 1$ . Dies entspricht dem Fall  $p = q = \frac{1}{2}$ , d.h. dem Spiel 4 (Matching Pennies, S. 31), und ist aus dem Theorem 3.1.6 (S. 32) bekannt.

Der Quotient  $\frac{ET(\Gamma_{\text{LoT}}(1))}{ET(\Gamma)}$  kann nicht größer als  $\frac{9}{8}$  werden und es gilt:

$$\lim_{p \downarrow 0, q \downarrow 0} \frac{ET(\Gamma_{\text{LoT}}(1))}{ET(\Gamma)} = \lim_{p \downarrow 0, q \uparrow 1} \frac{ET(\Gamma_{\text{LoT}}(1))}{ET(\Gamma)} = \lim_{p \uparrow 1, q \downarrow 0} \frac{ET(\Gamma_{\text{LoT}}(1))}{ET(\Gamma)} = \lim_{p \uparrow 1, q \uparrow 1} \frac{ET(\Gamma_{\text{LoT}}(1))}{ET(\Gamma)} = \frac{9}{8}.$$

Wie man leicht nachrechnet, werden auch die Quotienten  $\frac{ET(\Gamma_{\text{BiT}}(1))}{ET(\Gamma)}$  und  $\frac{ET(\Gamma_{\text{WiT}}(1))}{ET(\Gamma)}$  maximal, wenn die beiden Freiheitsgrade  $p$  und  $q$  gegen 0 oder 1 (alle Kombinationen) konvergieren. Die folgende Tabelle gibt einen Überblick.

Szenario $\Gamma_{\text{Tax}}$	$\frac{ET(\Gamma_{\text{Tax}}(1))}{ET(\Gamma)}$	maximaler Quotient (Supremum): $\lim_{p \downarrow 0, q \downarrow 0} \frac{ET(\Gamma_{\text{Tax}}(1))}{ET(\Gamma)} = \lim_{p \downarrow 0, q \uparrow 1} \frac{ET(\Gamma_{\text{Tax}}(1))}{ET(\Gamma)}$ $= \lim_{p \uparrow 1, q \downarrow 0} \frac{ET(\Gamma_{\text{Tax}}(1))}{ET(\Gamma)} = \lim_{p \uparrow 1, q \uparrow 1} \frac{ET(\Gamma_{\text{Tax}}(1))}{ET(\Gamma)}$
Loser Tax $\Gamma_{\text{LoT}}$	$\frac{9}{4} \left( \frac{1}{2 - (p+q-2pq)(p+q-2pq-1)} \right)$	$\frac{9}{8}$
Bilateral Tax $\Gamma_{\text{BiT}}$	$\frac{1}{1 - ((p+q-2pq) - \frac{1}{2})^2}$	$\frac{4}{3}$
Winner Tax $\Gamma_{\text{WiT}}$	$\frac{1}{4} \left( \frac{1}{-(p+q-2pq)(p+q-2pq-1)} \right)$	$\infty$

Tabelle 3.3.: Supremum des Quotienten  $\frac{ET(\Gamma_{\text{Tax}}(1))}{ET(\Gamma)}$  für die drei Steuerszenarien

Wir sehen, dass der relative Zuwachs im Erwarteten Transfer für die Steuerszenarien „Loser Tax“ und „Bilateral Tax“ beschränkt ist, während er im Szenario „Winner Tax“ beliebig groß werden kann!



**Bemerkung 3.1.11 (zusammengehörige Steuer- und Bonusszenarien)**

In Aussage (ii) des Theorems 3.1.7 (S. 32) hatten wir gesehen, dass die folgenden Szenarien den gleichen Erwarteten Transfer liefern:

- „Winner Tax“ und „Loser Bonus“
- „Loser Tax“ und „Winner Bonus“
- „Bilateral Tax“ und „Bilateral Bonus“.

Es seien  $A_{\text{Tax}}(x), B_{\text{Tax}}(x)$  die Matrizen aus einem Steuerszenario und  $A_{\text{Bon}}(x), B_{\text{Bon}}(x)$  die Matrizen aus dem dazugehörigen Bonusszenario. Dann gilt in jedem der drei Fälle:

$$A_{\text{Tax}}(x) = -B_{\text{Bon}}(x) \quad \text{und} \quad B_{\text{Tax}}(x) = -A_{\text{Bon}}(x).$$

Man könnte auf die Idee kommen, dass die Gleichheit des Erwarteten Transfers allein auf diese Beziehung zurückführbar ist. Dem ist aber nicht so. Andernfalls müsste die Übereinstimmung für jedes Matrixspiel erfüllt sein. Wie wir in Abschnitt 3.2.3 (ab S. 56) sehen werden, kann man dazu schon im Fall von fairen, nicht-symmetrischen  $3 \times 3$  - Matrixspielen Gegenbeispiele angeben.

An dieser Stelle soll analysiert werden, wie sich der Zusammenhang zwischen den Auszahlungsmatrizen im Fall der fairen, nicht-degenerierten  $2 \times 2$  - Matrixspiele mit gemischtem Gleichgewicht auswirkt.

Betrachten wir einerseits das Steuerszenario und die Gleichgewichts-Strategie des Zeilenspielers  $\bar{p}_{\text{Tax}} = (p_{\text{Tax}}(x), 1 - p_{\text{Tax}}(x))^{\top}$ . Nach Satz 1.2.2 (S. 15) gilt:

$$(p_{\text{Tax}}(x) \quad 1 - p_{\text{Tax}}(x)) B_{\text{Tax}}(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (p_{\text{Tax}}(x) \quad 1 - p_{\text{Tax}}(x)) B_{\text{Tax}}(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Andererseits betrachten wir das Bonusszenario und die Gleichgewichts-Strategie des Spaltenspielers  $\bar{q}_{\text{Bon}} = (q_{\text{Bon}}(x), 1 - q_{\text{Bon}}(x))^{\top}$ . Hier gilt:

$$(1 \quad 0) A_{\text{Bon}}(x) \begin{pmatrix} q_{\text{Bon}}(x) \\ 1 - q_{\text{Bon}}(x) \end{pmatrix} = (0 \quad 1) A_{\text{Bon}}(x) \begin{pmatrix} q_{\text{Bon}}(x) \\ 1 - q_{\text{Bon}}(x) \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Nutzen wir nun die Gleichheit  $B_{\text{Tax}}(x) = -A_{\text{Bon}}(x)$  aus und transponieren die Gleichung (3.2), so erhalten wir die zu (3.2) äquivalente Gleichung (3.3):

$$(q_{\text{Bon}}(x) \quad 1 - q_{\text{Bon}}(x)) B_{\text{Tax}}^{\top}(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (q_{\text{Bon}}(x) \quad 1 - q_{\text{Bon}}(x)) B_{\text{Tax}}^{\top}(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Die Gleichungen (3.1) und (3.3) unterscheiden sich nur dadurch, dass die Matrix  $B_{\text{Tax}}(x)$  im zweiten Fall als Transponierte erscheint. Nun ist entscheidend, dass das Transponieren der Matrix  $B_{\text{Tax}}(x)$  (und der Matrizen  $A_{\text{Tax}}(x), A_{\text{Bon}}(x), B_{\text{Bon}}(x), M$  jeweils) dem Vertauschen der Rollen von  $p$  und  $q$  entspricht.

Man erhält also die Gleichgewichts-Strategie des Spaltenspielers im Bonusszenario ganz leicht aus der Gleichgewichts-Strategie des Zeilenspielers im Steuerszenario und umgekehrt: man muss nur die Rollen von  $p$  und  $q$  vertauschen.

Dies gilt analog auch für die Gleichgewichts-Strategie des Zeilenspielers im Bonusszenario und die Gleichgewichts-Strategie des Spaltenspielers im Steuerszenario: man kann die eine aus der anderen gewinnen, indem man die Rollen von  $p$  und  $q$  vertauscht (vgl. Tabelle A.2, S. 78).

Zusammenfassend kann man den Zusammenhang zwischen dem jeweiligen Steuer- und Bonusszenario wie folgt in Formeln ausdrücken. Seien  $p, q \in (0, 1)$ .

Es sei  $\Gamma = (A, -A)$  das Matrixspiel mit  $A(p, q) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{q}{1-q} \\ -\frac{p}{1-p} & \frac{pq}{(1-p)(1-q)} \end{pmatrix}$ .

Weiter sei  $M$  die Matrix, die aus  $A$  entsteht, indem von jedem Eintrag aus  $A$  der Absolutbetrag genommen wird:  $M(p, q) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{q}{1-q} \\ \frac{p}{1-p} & \frac{pq}{(1-p)(1-q)} \end{pmatrix}$ .

Im Steuerszenario seien die Gleichgewichts-Strategie des Zeilenspielers  $\bar{p}_{\text{Tax}}(p, q; x)$  und die des Spaltenspielers  $\bar{q}_{\text{Tax}}(p, q; x)$  gegeben durch

$$\begin{aligned} \bar{p}_{\text{Tax}}(p, q; x) &= (p_{\text{Tax}}(p, q; x), 1 - p_{\text{Tax}}(p, q; x))^{\top} \quad \text{und} \\ \bar{q}_{\text{Tax}}(p, q; x) &= (q_{\text{Tax}}(p, q; x), 1 - q_{\text{Tax}}(p, q; x))^{\top}. \end{aligned}$$

Dann gilt im dazugehörigen Bonusszenario für die Gleichgewichts-Strategie des Zeilenspielers  $\bar{p}_{\text{Bon}}(p, q; x)$  und für die des Spaltenspielers  $\bar{q}_{\text{Bon}}(p, q; x)$ :

$$\begin{aligned} \bar{p}_{\text{Bon}}(p, q; x) &= (q_{\text{Tax}}(q, p; x), 1 - q_{\text{Tax}}(q, p; x))^{\top} \quad \text{und} \\ \bar{q}_{\text{Bon}}(p, q; x) &= (p_{\text{Tax}}(q, p; x), 1 - p_{\text{Tax}}(q, p; x))^{\top}. \end{aligned}$$

Der Erwartete Transfer im Steuerszenario errechnet sich durch

$$ET_{\text{Tax}}(p, q; x) = (p_{\text{Tax}}(p, q; x) \quad 1 - p_{\text{Tax}}(p, q; x)) M(p, q) \begin{pmatrix} q_{\text{Tax}}(p, q; x) \\ 1 - q_{\text{Tax}}(p, q; x) \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Der Erwartete Transfer im Bonusszenario errechnet sich durch

$$\begin{aligned} ET_{\text{Bon}}(p, q; x) &= (q_{\text{Tax}}(q, p; x) \quad 1 - q_{\text{Tax}}(q, p; x)) M(p, q) \begin{pmatrix} p_{\text{Tax}}(q, p; x) \\ 1 - p_{\text{Tax}}(q, p; x) \end{pmatrix} \\ &= (p_{\text{Tax}}(q, p; x) \quad 1 - p_{\text{Tax}}(q, p; x)) M(q, p) \begin{pmatrix} q_{\text{Tax}}(q, p; x) \\ 1 - q_{\text{Tax}}(q, p; x) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Die Gleichungen (3.4) und (3.5) sind im Wesentlichen gleich, nur die Rollen von  $p$  und  $q$  sind vertauscht. Für die identische Übereinstimmung des Erwarteten Transfers im Steuer- und im zugehörigen Bonusmodell ist schlussendlich entscheidend, dass sich in jedem Szenario ein Erwarteter Transfer ergibt, der symmetrisch in  $p$  und  $q$  ist. D.h. man kann im Erwarteten Transfer  $p$  und  $q$  vertauschen, ohne dass sich etwas ändert und es gilt (vgl. Tabelle A.3, S. 79):

$$ET_{\text{Tax}}(p, q; x) = ET_{\text{Tax}}(q, p; x) = ET_{\text{Bon}}(p, q; x) = ET_{\text{Bon}}(q, p; x).$$

**Bemerkung 3.1.12 (Gegenbeispiel mit Spielwert  $\bar{v} \neq 0$ )**

Die Forderung „ $\Gamma = (A, -A)$  ist ein faires Spiel“, d.h.  $\Gamma$  hat den Spielwert  $\bar{v} = 0$ , ist notwendige Voraussetzung für die Gültigkeit der Theoreme 3.1.6 und 3.1.7 (S. 32). Wir betrachten das folgende Spiel, das sich von unserem Standardbeispiel nur im letzten Eintrag unterscheidet.

**Spiel 5**

$$\Gamma = (A, -A) \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist nicht-degeneriert, besitzt das Gleichgewicht

$$(\bar{p}, \bar{q}) = \left( \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)^\top, \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)^\top \right)$$

und den Spielwert

$$\bar{v} = -1.$$

Alle sechs Szenarien liefern für einen Prozentsatz  $x \in [0, 1)$  Bimatrixspiele mit eindeutigem Nash-Gleichgewicht. (Für  $x = 1$  ist dies in den Szenarien „Winner Tax“, „Loser Tax“, „Winner Bonus“ und „Loser Bonus“ nicht der Fall.)

Die Abbildung 3.3 gibt Aufschluss über das Verhalten des Erwarteten Transfers in unseren sechs Manipulations-Szenarien. Die Tabelle A.4 in Anhang A.1.3 (S. 81) zeigt die exakten Ergebnisse für den Standard-Prozentsatz  $x = 0.1$ .

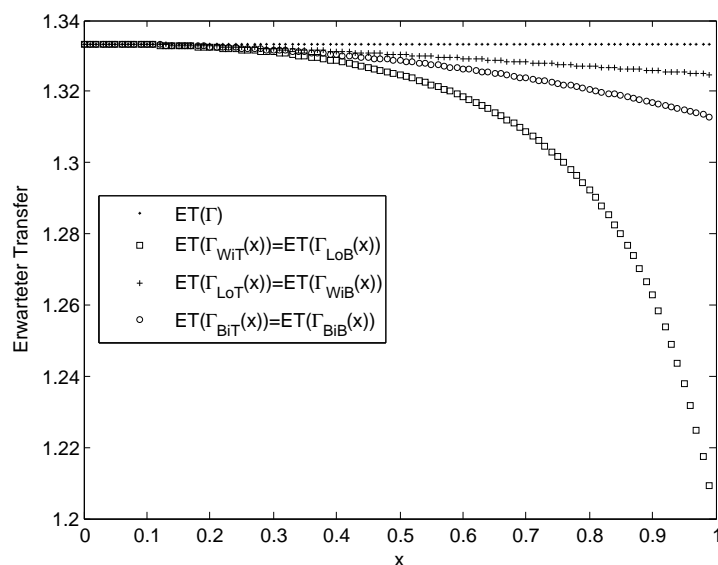


Abbildung 3.3.: Erwarteter Transfer in den sechs Szenarien für Spiel 5, in Abhängigkeit vom Prozentsatz  $x$

Wir sehen, dass die Übereinstimmungen im Erwarteten Transfer zwischen je zwei Szenarien immernoch, wie in Aussage (ii) des Theorems 3.1.7 (S. 32), gegeben sind. Allerdings ist für jedes Modell und jeden Prozentsatz  $x \in (0, 1)$  der Erwartete Transfer in der manipulierten Situation geringer als im Ausgangsspiel.

Wir formulieren die folgende Vermutung, die sich durch Monte-Carlo-Suche nicht widerlegen lässt. Es wurden  $10^5$  zufällige Matrixspiele  $\Gamma = (A, -A)$  (jeder Eintrag der Matrix  $A$  unabhängig, standardnormalverteilt) mit eindeutigem Gleichgewicht erzeugt (Matrixspiele ohne eindeutigem Gleichgewicht wurden verworfen). Für jeden Prozentsatz  $x \in \{0, 0.01, 0.02, \dots, 0.99\}$  wurden alle sechs Manipulationen vorgenommen und die Vermutung 3.1.13 getestet. Der Beweis über die Gültigkeit der vollständigen Aussage ist ein offenes Problem. Auch die Frage, welche Spiele mit  $\bar{v} \neq 0$  typischerweise zu einem Anstieg im Erwarteten Transfer führen und welche zu einer Abnahme, ist noch offen.

### Vermutung 3.1.13

Für jedes nicht-degenerierte  $2 \times 2$  - Matrixspiel  $\Gamma = (A, -A)$  und jeden Prozentsatz  $x \in (0, 1)$  gilt:

(i) Die Bimatrixspiele  $\Gamma_{WiT}(x)$ ,  $\Gamma_{LoB}(x)$ ,  $\Gamma_{LoT}(x)$ ,  $\Gamma_{WiB}(x)$ ,  $\Gamma_{BiT}(x)$  und  $\Gamma_{BiB}(x)$  haben jeweils genau ein Nash-Gleichgewicht.

$$(ii) \quad ET(\Gamma_{WiT}(x)) = ET(\Gamma_{LoB}(x)).$$

$$ET(\Gamma_{LoT}(x)) = ET(\Gamma_{WiB}(x)).$$

$$ET(\Gamma_{BiT}(x)) = ET(\Gamma_{BiB}(x)).$$

Außerdem gelten gleichzeitig entweder (iii) und (iv) oder (iii)' und (iv)'

(iii)  $ET(\Gamma_{WiT}(x))$ ,  $ET(\Gamma_{LoB}(x))$ ,  $ET(\Gamma_{LoT}(x))$ ,  $ET(\Gamma_{WiB}(x))$ ,  $ET(\Gamma_{BiT}(x))$  und  $ET(\Gamma_{BiB}(x))$  sind monoton wachsend in  $x$  oder konstant.

$$(iv) \quad ET(\Gamma_{WiT}(x)) \geq ET(\Gamma_{BiT}(x)) \geq ET(\Gamma_{LoT}(x)) \geq ET(\Gamma).$$

(iii)'  $ET(\Gamma_{WiT}(x))$ ,  $ET(\Gamma_{LoB}(x))$ ,  $ET(\Gamma_{LoT}(x))$ ,  $ET(\Gamma_{WiB}(x))$ ,  $ET(\Gamma_{BiT}(x))$  und  $ET(\Gamma_{BiB}(x))$  sind monoton fallend in  $x$  oder konstant.

$$(iv)' \quad ET(\Gamma_{WiT}(x)) \leq ET(\Gamma_{BiT}(x)) \leq ET(\Gamma_{LoT}(x)) \leq ET(\Gamma).$$

### Bemerkung 3.1.14 (experimentelle Ergebnisse für zufällige Spiele)

Man kann fragen, wie sich der Erwartete Transfer von Matrixspielen mit zufälligen  $2 \times 2$  - Matrizen tendenziell verhält. Für die sechs Szenarien wurde dazu das folgende Experiment durchgeführt:

- Erzeuge mittels Verwerfungsmethode  $10^5$  zufällige  $2 \times 2$  - Matrixspiele  $\Gamma = (A, -A)$  (jeder Eintrag von  $A$  unabhängig, standardnormalverteilt) mit eindeutigem Gleichgewicht. Der Begriff und die Anwendung der Verwerfungsmethode geht auf JOHN VON NEUMANN zurück [Neu 1951]. In unserem Kontext meinen wir damit das Folgende: Erzeuge eine zufällige Matrix. Nehme das Spiel als Testinstanz auf, falls es ein eindeutiges Gleichgewicht besitzt. Anderfalls verwirf es. Erzeuge solange zufällige Matrizen, bis es  $10^5$  Testinstanzen mit eindeutigem Gleichgewicht sind.
- Für jeden festen Prozentsatz  $x \in \{0, 0.01, 0.02, \dots, 0.99\}$  wurden diese  $10^5$  Testinstanzen, einzeln, auf das Folgende geprüft: Liefern die sechs Manipulations-Szenarien ein Spiel mit eindeutigem Gleichgewicht? Berechne ggf. den jeweiligen Erwarteten Transfer.

An dieser Stelle sei erwähnt, dass alle Experimente aus dieser Arbeit mit Hilfe der Software Matlab durchgeführt wurden. Zur Berechnung der Gleichgewichte eines beliebigen Bimatrixspiels wurde ein Algorithmus programmiert, der sich an dem Vorgehen aus [SF 1983, S.100] orientiert. (Siehe auch die Informationen in Anhang A.4 (S. 101) und den Quellcode auf der beigefügten CD.)

Im Experiment kam für beliebiges  $x \in (0, 1)$  keine Instanz mit uneindeutigem Gleichgewicht nach einer der sechs Manipulationen vor. In allen Instanzen traf die obige Vermutung 3.1.13 zu. Deshalb reicht es, die Ergebnisse für die drei Szenarien anzugeben.

Für festen Steuersatz  $x$  wurde registriert, bei wie vielen Instanzen der Erwartete Transfer nach der Manipulation stieg oder genauso groß war wie vorher. Auffällig war, dass alle Instanzen mit reinem Gleichgewicht (davon kamen 66841 unter den  $10^5$  erzeugten Spielen vor) für jedes Szenario einen konstanten Erwarteten Transfer aufwiesen. Unter den Instanzen mit gemischtem Gleichgewicht scheint der Anteil der Spiele mit wachsendem oder gleich bleibendem Erwarteten Transfer nicht vom Steuersatz  $x$  abzuhängen: Er lag im Experiment für jedes der drei Steuermodelle (fast) konstant zwischen 35% und 36%.

Die Abbildung 3.4 zeigt im linken Diagramm den prozentualen Anteil aller Instanzen mit gestiegenem oder gleich gebliebenem Erwarteten Transfer, in Abhängigkeit vom Steuersatz  $x \in [0, 1)$ . Er scheint (bis auf zwei Ausreißer) für jedes der Szenarien konstant zwischen 78% und 79% zu liegen.

Weiterhin wurde pro festem Steuersatz  $x$  der durchschnittliche Quotient aus dem Erwarteten Transfer im manipulierten Spiel und dem Erwarteten Transfer im Ausgangsspiel berechnet. (Es gab dabei keine „Problem“-Instanzen mit  $ET(\Gamma) = 0$ .) Die rechte Grafik in Abbildung 3.4 zeigt den mittleren Quotienten über alle Instanzen. Er ist für die drei Szenarien monoton fallend in  $x$  und tritt in einer (aus obiger Vermutung 3.1.13) bekannten Reihenfolge auf. Die Instanzen mit fallendem Erwarteten Transfer scheinen bei der relativen Änderung des Erwarteten Transfers mehr zu Buche schlagen als jene mit einem steigendem. Der Quotient fällt aber nicht unter den Wert 0.99.

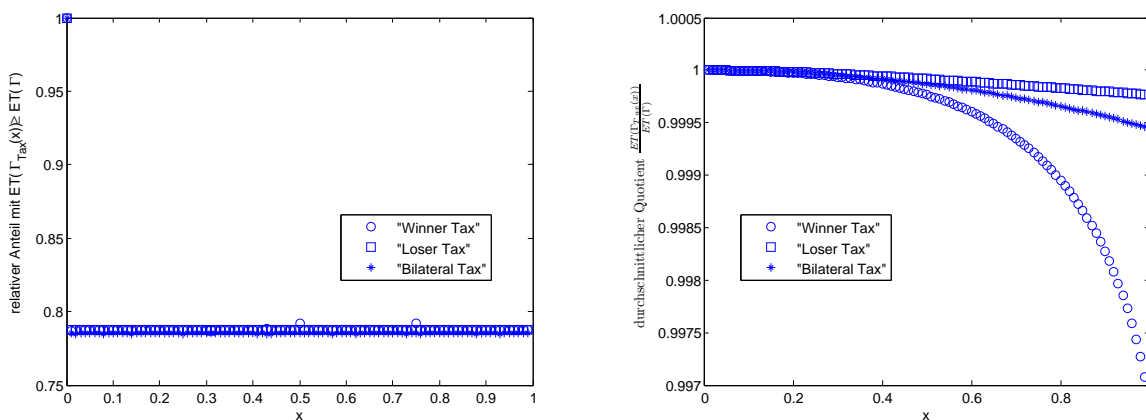


Abbildung 3.4.: Ergebnisse des Experiments für **zufällige**  $2 \times 2$  - Spiele: alle Instanzen

In Anhang A.1.4 (S. 82) findet man die grafischen Ergebnisse getrennt nach der Träermächtigkeit der Gleichgewichts-Strategien im Ausgangsspiel.

## 3.2. Resultate für $3 \times 3$ - Matrixspiele

Hier erhöhen wir die Dimension des Matrixspiels auf 3 und betrachten erneut die sechs Szenarien aus Tabelle 2.1 (S. 24). Es wird sich herausstellen, dass die Aussagen aus Abschnitt 3.1 (ab S. 25) für beliebige faire, nicht-degenerierte  $3 \times 3$  - Matrixspiele nicht mehr gelten. Aber sie sind richtig, wenn wir die Klasse der **symmetrischen**  $3 \times 3$  - Matrixspiele betrachten. (Symmetrische Matrixspiele sind nach Satz 1.2.17 (S. 19) immer fair.) In Abschnitt 3.2.1 wird an einem konkreten symmetrischen Spiel durchgerechnet, wie sich der Erwartete Transfer in den jeweiligen Szenarien ändert. Die entsprechenden allgemeinen Aussagen werden in Abschnitt 3.2.2 formuliert und bewiesen. Im abschließenden Abschnitt 3.2.3 werden einige interessante Bemerkungen gemacht und experimentelle Ergebnisse für nicht-symmetrische  $3 \times 3$  - Spiele vorgestellt.

### 3.2.1. Beispielrechnung

Wir betrachten beispielhaft das folgende symmetrische Spiel als Ausgangsspiel.

**Spiel 6**  
 $\Gamma = (A, -A)$  mit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Dieses Spiel besitzt genau ein Gleichgewicht. Für symmetrische Matrixspiele, d.h. für Spiele mit der Eigenschaft  $A = -A^\top$ , ist nach Satz 1.2.17 (S. 19) bekannt, dass die Mengen der Gleichgewichts-Strategien der beiden Spieler übereinstimmen und der Wert des Spiels durch  $\bar{v} = 0$  gegeben ist. Die beiden Gleichgewichts-Strategien  $\bar{p} = \bar{q} = (p_1, p_2, 1 - p_1 - p_2)^\top$  bestimmt man für dieses Beispiel am schnellsten durch Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} p_2 - 2(1 - p_1 - p_2) &= 0 \\ -p_1 + (1 - p_1 - p_2) &= 0. \end{aligned}$$

Als Ergebnis erhält man das Gleichgewicht  $(\bar{p}, \bar{q}) = \left( \left( \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right)^\top, \left( \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right)^\top \right)$ .

Damit ergibt sich der Erwartete Transfer

$$ET(\Gamma) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{2}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{3}{4}.$$

Wir betrachten auch für dieses Spiel das Steuerszenario „Winner Tax“, in dem der Gewinner einen prozentualen Anteil, von beispielsweise 10% seines Gewinns, abgeben muss. Die Auszahlungsmatrizen der beiden Spieler sind dann gegeben durch

$$A(0.1) = \begin{pmatrix} 0 & 0.9 & -2 \\ -1 & 0 & 0.9 \\ 1.8 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B(0.1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1.8 \\ 0.9 & 0 & -1 \\ -2 & 0.9 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dieses symmetrische Bimatrixspiel hat genau ein Gleichgewicht  $(\bar{p}(0.1), \bar{q}(0.1))$ . Wegen der Symmetrie-Eigenschaft ( $A(0.1) = B^\top(0.1)$ ) sind die Gleichgewichts-Strategien identisch:  $\bar{p}(0.1) = \bar{q}(0.1) = (p_1, p_2, 1 - p_1 - p_2)^\top$ . Man berechnet sie durch Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 0p_1 - 1p_2 + \frac{18}{10}(1 - p_1 - p_2) &= \frac{9}{10}p_1 + 0p_2 - 1(1 - p_1 - p_2) \\ 0p_1 - 1p_2 + \frac{18}{10}(1 - p_1 - p_2) &= -2p_1 + \frac{9}{10}p_2 + 0(1 - p_1 - p_2). \end{aligned}$$

Wir erhalten die Strategien  $\bar{p}(0.1) = \bar{q}(0.1) = \left(\frac{371}{1445}, \frac{722}{1445}, \frac{352}{1445}\right)^\top$ . Mit deren Hilfe können wir die erwarteten Auszahlungen der beiden Spieler für das Steuermodell berechnen. Wegen der Symmetrie-Eigenschaft stimmen sie überein:

$$\bar{v}_1(0.1) = \bar{v}_2(0.1) = \begin{pmatrix} \frac{371}{1445} & \frac{722}{1445} & \frac{352}{1445} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0.9 & -2 \\ -1 & 0 & 0.9 \\ 1.8 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{371}{1445} \\ \frac{722}{1445} \\ \frac{352}{1445} \end{pmatrix} = -\frac{271}{7225} \approx -0.0375.$$

Bei einer Gewinnbesteuerung müssen beide Spieler auf lange Sicht mit einem Verlust rechnen. Dieses Ergebnis scheint intuitiv plausibel. Hingegen stellen wir bei der Prüfung des Erwarteten Transfers im besteuerten Spiel erneut einen paradoxen Anstieg im Vergleich zum Ausgangsspiel fest:

$$ET(\Gamma_{\text{WiT}}(0.1)) = \begin{pmatrix} \frac{371}{1445} & \frac{722}{1445} & \frac{352}{1445} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{371}{1445} \\ \frac{722}{1445} \\ \frac{352}{1445} \end{pmatrix} = \frac{1084}{1445} = \frac{3}{4} + \frac{1}{5780} \approx 0.7502.$$

Für dieses Beispiel sind die resultierenden Werte aus den anderen Szenarien in der Tabelle 3.4 dargestellt.

Die Abbildung 3.5 zeigt für das hier betrachtete Spiel 6 die Entwicklung des Erwarteten Transfers für alle Szenarien in Abhängigkeit vom Prozentsatz  $x$ .

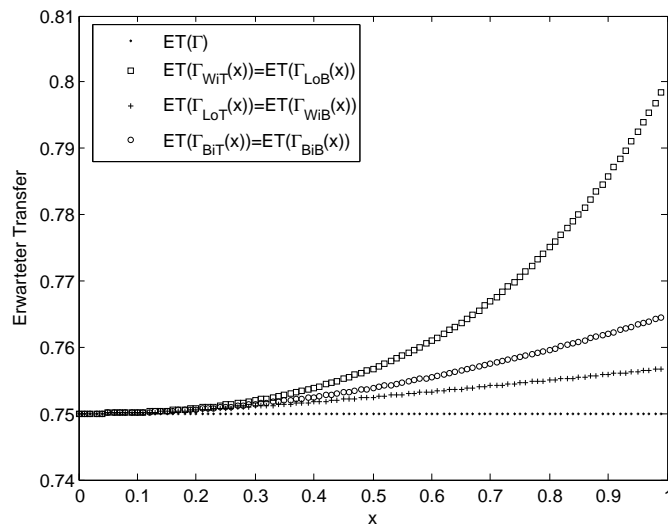


Abbildung 3.5.: Erwarteter Transfer in den sechs Szenarien für Spiel 6 (S. 46), in Abhängigkeit vom Prozentsatz  $x$

Szenario	$A$	$B$	$\bar{p} = \bar{q}$	$\bar{v}_1 = \bar{v}_2$	$ET$
Matrix- spiel: $\Gamma$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$	0	$\frac{3}{4}$
Winner Tax : $\Gamma_{WiT}(0.1)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0.9 & -2 \\ -1 & 0 & 0.9 \\ 1.8 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1.8 \\ 0.9 & 0 & -1 \\ -2 & 0.9 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{371}{1445} \\ \frac{722}{1445} \\ \frac{352}{1445} \end{pmatrix}$	$-\frac{271}{7225}$ $\approx -0.037509$	$\frac{3}{4} + \frac{1}{5780}$
Loser Bonus: $\Gamma_{LoB}(0.1)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1.8 \\ -0.9 & 0 & 1 \\ 2 & -0.9 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -0.9 & 2 \\ 1 & 0 & -0.9 \\ -1.8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{352}{1445} \\ \frac{722}{1445} \\ \frac{371}{1445} \end{pmatrix}$	$\frac{271}{7225}$ $\approx 0.037509$	$\frac{3}{4} + \frac{1}{5780}$
Loser Tax: $\Gamma_{LoT}(0.1)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2.2 \\ -1.1 & 0 & 1 \\ 2 & -1.1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1.1 & 2 \\ 1 & 0 & -1.1 \\ -2.2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{452}{1765} \\ \frac{882}{1765} \\ \frac{431}{1765} \end{pmatrix}$	$-\frac{331}{8825}$ $\approx -0.037507$	$\frac{3}{4} + \frac{1}{7060}$
Winner Bonus: $\Gamma_{WiB}(0.1)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1.1 & -2 \\ -1 & 0 & 1.1 \\ 2.2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2.2 \\ 1.1 & 0 & -1 \\ -2 & 1.1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{431}{1765} \\ \frac{882}{1765} \\ \frac{452}{1765} \end{pmatrix}$	$\frac{331}{8825}$ $\approx 0.037507$	$\frac{3}{4} + \frac{1}{7060}$
Bilateral Tax: $\Gamma_{BiT}(0.1)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0.95 & -2.1 \\ -1.05 & 0 & 0.95 \\ 1.9 & -1.05 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1.05 & 1.9 \\ 0.95 & 0 & -1.05 \\ -2.1 & 0.95 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{821}{3202} \\ \frac{1600}{3202} \\ \frac{781}{3202} \end{pmatrix}$	$-\frac{1201}{32020}$ $\approx -0.037508$	$\frac{3}{4} + \frac{1}{6404}$
Bilateral Bonus: $\Gamma_{BiB}(0.1)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1.05 & -1.9 \\ -0.95 & 0 & 1.05 \\ 2.1 & -0.95 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -0.95 & 2.1 \\ 1.05 & 0 & -0.95 \\ -1.9 & 1.05 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{781}{3202} \\ \frac{1600}{3202} \\ \frac{821}{3202} \end{pmatrix}$	$\frac{1201}{32020}$ $\approx 0.037508$	$\frac{3}{4} + \frac{1}{6404}$

Tabelle 3.4.: Ergebnisse für Spiel 6 (S. 46) mit Steuer- bzw. Bonussatz  $x = 0.1$ 

Bei Betrachtung der Tabelle 3.4 und der Abbildung 3.5 kann man die gleichen Phänomene, wie schon für faire, nicht-degenerierte  $2 \times 2$  - Matrixspiele erkennen. Dass diese Zusammenhänge auch für alle nicht-degenerierten, symmetrischen  $3 \times 3$  Spiele gelten, bestätigen die Theoreme 3.2.1 und 3.2.2 im nächsten Abschnitt.



### 3.2.2. Theoreme und Beweise

Wie schon im Fall der nicht-degenerierten, fairen  $2 \times 2$  - Matrixspiele ist zur Formulierung der entsprechenden Theoreme eine Aufteilung in Haupt- und Nebenfälle hilfreich.

Die Menge  $M$  der nicht-degenerierten, symmetrischen  $3 \times 3$  - Matrixspiele wird in zwei disjunkte Teilmengen zerlegt.

Wir erinnern an das Spiel 1 (Stein-Schere-Papier, S. 9):  $\Gamma = (A, -A)$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wie wir sehen werden, wird dieses Spiel einen Sonderfall einnehmen.

Sei

$$M = \{\Gamma = (A, -A) \mid \Gamma \text{ ist nicht-degeneriertes, symmetrisches } 3 \times 3 \text{ - Matrixspiel}\}.$$

Die Menge  $M_1 \subset M$  enthalte alle nicht-degenerierten, symmetrischen  $3 \times 3$  - Matrixspiele mit reinem Gleichgewicht sowie alle nicht-degenerierten Vielfachen des Spiels 1:

$$M_1 = \{\Gamma \in M \mid \Gamma \text{ hat reines Gleichgewicht}\} \cup \left\{ \Gamma = (\lambda A, -\lambda A) \mid A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Die Menge  $M_2 \subset M$  enthalte den verbleibenden Teil der nicht-degenerierten, symmetrischen  $3 \times 3$  - Matrixspiele, d.h. alle Spiele mit gemischtem Gleichgewicht außer den nicht-degenerierten Vielfachen des Spiels 1 :

$$M_2 = \{\Gamma \in M \mid \Gamma \text{ hat gemischtes Gleichgewicht}\} \setminus M_1.$$

Es gelten die folgenden beiden Theoreme.

#### Theorem 3.2.1

Für jedes Matrixspiel  $\Gamma \in M_1$  und jeden Steuer- bzw. Bonussatz  $x \in [0, 1)$  gilt:

(i) Die Bimatrixspiele  $\Gamma_{WiT}(x)$ ,  $\Gamma_{LoB}(x)$ ,  $\Gamma_{LoT}(x)$ ,  $\Gamma_{WiB}(x)$ ,  $\Gamma_{BiT}(x)$  und  $\Gamma_{BiB}(x)$  haben jeweils genau ein Nash-Gleichgewicht.

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad & ET(\Gamma_{WiT}(x)) = ET(\Gamma_{LoB}(x)) = ET(\Gamma_{LoT}(x)) = ET(\Gamma_{WiB}(x)) \\ & = ET(\Gamma_{BiT}(x)) = ET(\Gamma_{BiB}(x)) = ET(\Gamma) \\ & = \begin{cases} 0, & \text{falls } \Gamma \text{ ein reines Gleichgewicht besitzt} \\ \frac{2}{3}\lambda, & \text{falls } \Gamma \text{ das } \lambda\text{-fache des Spiels 1 ist } (\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \end{cases} \end{aligned}$$

**Theorem 3.2.2**

Für jedes Matrixspiel  $\Gamma \in M_2$  und jeden Steuer- bzw. Bonussatz  $x \in [0, 1)$  gilt:

- (i) Die Bimatrixspiele  $\Gamma_{WiT}(x)$ ,  $\Gamma_{LoB}(x)$ ,  $\Gamma_{LoT}(x)$ ,  $\Gamma_{WiB}(x)$ ,  $\Gamma_{BiT}(x)$  und  $\Gamma_{BiB}(x)$  haben jeweils genau ein Nash-Gleichgewicht.
- (ii)  $ET(\Gamma_{WiT}(x)) = ET(\Gamma_{LoB}(x))$ .  
 $ET(\Gamma_{LoT}(x)) = ET(\Gamma_{WiB}(x))$ .  
 $ET(\Gamma_{BiT}(x)) = ET(\Gamma_{BiB}(x))$ .
- (iii)  $ET(\Gamma_{WiT}(x))$ ,  $ET(\Gamma_{LoB}(x))$ ,  $ET(\Gamma_{LoT}(x))$ ,  $ET(\Gamma_{WiB}(x))$ ,  $ET(\Gamma_{BiT}(x))$  und  $ET(\Gamma_{BiB}(x))$  sind streng monoton wachsend in  $x$ .
- (iv)  $ET(\Gamma_{WiT}(x)) > ET(\Gamma_{BiT}(x)) > ET(\Gamma_{LoT}(x)) > ET(\Gamma)$ , falls  $x \in (0, 1)$ .  
 $ET(\Gamma_{WiT}(x)) = ET(\Gamma_{BiT}(x)) = ET(\Gamma_{LoT}(x)) = ET(\Gamma)$ , falls  $x = 0$ .

Wir beginnen mit einer Hilfsaussage, bevor in einem Beweis die Theoreme 3.2.1 und 3.2.2 verifiziert werden.

**Lemma 3.2.3**

Für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt:  $f(a, b) = -a^2 - b^2 + a + b + ab - 1 \leq 0$ .

*Beweis.* Der Gradient der Funktion  $f(a, b)$  ist gegeben durch

$$\text{grad}(f(a, b)) = \begin{pmatrix} -2a + 1 + b \\ -2b + 1 + a \end{pmatrix}.$$

Die Hessematrix der Funktion ist

$$H_f(a, b) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Weiterhin gilt:  $\text{grad}(f(a, b)) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow a = b = 1$  und  $H_f(1, 1)$  ist negativ definit. Daher hat die Funktion  $f$  ein Maximum in  $(a, b) = (1, 1)$  mit  $f(1, 1) = 0$ .

Somit folgt  $f(a, b) \leq 0$  für alle  $a, b \in \mathbb{R}$ . ■

*Beweis (Theoreme 3.1.6 und 3.1.7).* Ist  $\Gamma = (A, -A)$  ein symmetrisches Matrixspiel, so müssen einerseits alle Diagonalelemente  $a_{ii} = 0$  sein. Andererseits dürfen in einem nicht-degenerierten Spiel nie zwei Elemente pro Zeile übereinstimmen (siehe Definition 1.2.3 auf S. 15). Wegen Satz 1.2.7 (S. 17) nehmen wir o.B.d.A. an, dass die Matrix  $A$  die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a_{13} \\ -1 & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

hat, mit  $a_{13} \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ,  $a_{23} \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$  und  $a_{13} \neq a_{23}$ .

Wir unterscheiden vier Fälle nach den Vorzeichen von  $a_{13}$  und  $a_{23}$ . Davon führen drei Fälle (Nebenfälle) auf Matrixspiele mit reinem Gleichgewicht. Im Hauptfall betrachten wir Matrixspiele mit gemischtem Gleichgewicht.

Im gesamten Beweis nutzen wir aus, dass sowohl im Ausgangsspiel als auch in den Bimatrixspielen der möglichen sechs Szenarien, symmetrische Situationen (d.h.  $A = B^\top$ ) vorliegen. Bei der Überprüfung auf Degeneriertheit und bei der Berechnung der Gleichgewichte genügt es, die Spiele aus der Sicht eines Spielers zu analysieren. Für den anderen Spieler ergibt sich stets das Gleiche.

**Nebenfall 1 :** Sei  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ -1 & 0 & b \\ -a & -b & 0 \end{pmatrix}$  mit  $a, b > 0$ ,  $a \neq 1$  und  $a \neq b$ .

Die dritte Zeile wird von der ersten strikt dominiert. Mit Satz 1.2.10 (S. 18) erhält man leicht, dass das Spiel  $\Gamma = (A, -A)$  nicht-degeneriert ist und das eindeutige, reine Nash-Gleichgewicht  $(\bar{p}, \bar{q}) = ((1, 0, 0)^\top, (1, 0, 0)^\top)$  besitzt.

In unseren sechs Szenarien bleiben für jeden beliebigen Prozentsatz  $x \in (0, 1)$  die **Vorzeichenrelationen** erhalten. Weiterhin wird stets die dritte Zeile von der ersten dominiert. Das Spiel ist in jedem der Modelle nicht-degeneriert und besitzt ebenso das eindeutige, reine Gleichgewicht  $(\bar{p}, \bar{q}) = ((1, 0, 0)^\top, (1, 0, 0)^\top)$ . (Die Eindeutigkeit des Gleichgewichts folgt aus  $3 \notin \text{supp}(\bar{p}) = \text{supp}(\bar{q})$ , der Tatsache, dass nach Satz 1.2.5 (S. 16) eine ungerade Anzahl von Gleichgewichten vorliegen muss sowie der Erkenntnis, dass  $(\bar{p}, \bar{q}) = ((0, 1, 0)^\top, (0, 1, 0)^\top)$  kein reines Gleichgewicht für das jeweilige Spiel ist.)

Es gilt daher:

$$\begin{aligned} ET(\Gamma) &= ET(\Gamma_{\text{WiT}}(x)) = ET(\Gamma_{\text{LoB}}(x)) = ET(\Gamma_{\text{LoT}}(x)) = ET(\Gamma_{\text{WiB}}(x)) \\ &= ET(\Gamma_{\text{BiT}}(x)) = ET(\Gamma_{\text{BiB}}(x)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ a & b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Für diesen Nebenfall sind die Aussagen des Theorems 3.2.1 gezeigt.

**Nebenfall 2 :** Sei  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -a \\ -1 & 0 & -b \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$  mit  $a, b > 0$ ,  $b \neq 1$  und  $a \neq b$ .

Analog zum 1. Nebenfall. Hier wird die zweite Zeile von der dritten strikt dominiert. Das eindeutig bestimmte Nash-Gleichgewicht im Ausgangsspiel und in den sechs Bimatrixspielen ist gegeben durch  $(\bar{p}, \bar{q}) = ((0, 0, 1)^\top, (0, 0, 1)^\top)$ .

**Nebenfall 3 :** Sei  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ -1 & 0 & -b \\ -a & b & 0 \end{pmatrix}$  mit  $a, b > 0$ ,  $a \neq 1$  und  $b \neq 1$ .

Analog zum 1. Nebenfall. Hier wird die zweite Zeile strikt von der ersten dominiert. Das eindeutig bestimmte Nash-Gleichgewicht im Ausgangsspiel und in den sechs Bimatrixspielen ist gegeben durch  $(\bar{p}, \bar{q}) = ((1, 0, 0)^\top, (1, 0, 0)^\top)$ .

Hauptfall: Sei  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -a \\ -1 & 0 & b \\ a & -b & 0 \end{pmatrix}$  mit  $a, b > 0$ .

Wir zeigen die Nicht-Degeneriertheit sowie die Eindeutigkeit des Gleichgewichts einerseits für das Ausgangsspiel  $\Gamma$  und andererseits für das Spiel  $\Gamma_{\text{WiT}}(x)$  im Szenario „Winner Tax“.

Dazu betrachten wir das Spiel  $\Gamma_{\text{WiT}}(x) = (A(x), B(x))$  mit  $x \in [0, 1)$  und

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & (1-x) & -a \\ -1 & 0 & (1-x)b \\ (1-x)a & -b & 0 \end{pmatrix}, \quad B(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & (1-x)a \\ (1-x) & 0 & -b \\ -a & (1-x)b & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir lassen explizit  $x = 0$  zu und erhalten in diesem Fall die entsprechenden Aussagen für das Ausgangsspiel.

Wir nehmen an, dass das Spiel  $\Gamma_{\text{WiT}}(x)$  für ein  $x \in [0, 1)$  degeneriert ist.

Dies wäre zum einen der Fall, wenn ein Spieler mindestens zwei reine beste Antworten auf eine reine Strategie des anderen Spielers hat. Dann müssten also mindestens zwei Einträge innerhalb einer Spalte von  $A(x)$  übereinstimmen. Dies ist aber ausgeschlossen, da  $a, b > 0$  und  $x \in [0, 1)$ .

Zum anderen bliebe die Möglichkeit, dass es drei reine beste Antworten eines Spielers auf eine gemischte Strategie mit Trägermächtigkeit 2 des anderen Spielers gibt. Nehmen wir an, Spieler 2 spielt eine gemischte Strategie  $q_0$  mit  $\text{supp}(q_0) = 2$ . Dann ergeben sich drei Fälle, die alle zum Widerspruch führen:

- Sei  $q_0 = \begin{pmatrix} q \\ 1-q \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $q \in (0, 1)$ . Dann ist  $A(x)q_0 = \begin{pmatrix} (1-x)(1-q) \\ -q \\ (1-x)aq - b(1-q) \end{pmatrix}$ .

Es müsste u.a. gelten:  $\underbrace{(1-x)(1-q)}_{>0} = \underbrace{-q}_{<0}$ , was zum Widerspruch führt.

- Sei  $q_0 = \begin{pmatrix} q \\ 0 \\ 1-q \end{pmatrix}$ ,  $q \in (0, 1)$ . Dann ist  $A(x)q_0 = \begin{pmatrix} -a(1-q) \\ -q + (1-x)b(1-q) \\ (1-x)aq \end{pmatrix}$ .

Es müsste u.a. gelten:  $\underbrace{-a(1-q)}_{<0} = \underbrace{(1-x)aq}_{>0}$ , was zum Widerspruch führt.

- Sei  $q_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ q \\ 1-q \end{pmatrix}$ ,  $q \in (0, 1)$ . Dann ist  $A(x)q_0 = \begin{pmatrix} (1-x)q - a(1-q) \\ (1-x)b(1-q) \\ -bq \end{pmatrix}$ .

Es müsste u.a. gelten:  $\underbrace{(1-x)b(1-q)}_{>0} = \underbrace{-bq}_{<0}$ , was zum Widerspruch führt.

Demnach ist weder das Ausgangsspiel  $\Gamma$ , noch das Bimatrixspiel  $\Gamma_{\text{WiT}}(x)$  degeneriert.

Die Eindeutigkeit des Gleichgewichts im Spiel  $\Gamma$  folgt sofort nach Satz 1.2.16 (S. 19). Sei  $p \in \Sigma_3$ . Die Gleichgewichts-Strategien  $\bar{p} = \bar{q} = (p_1, p_2, 1 - p_1 - p_2)^\top$  erhält man, wegen Satz 1.2.8 (S. 17), durch Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}(A^\top p)_1 &= 0 \\ (A^\top p)_2 &= 0.\end{aligned}$$

Es gilt daher

$$\bar{p} = \bar{q} = \left( \frac{b}{1+a+b}, \frac{a}{1+a+b}, \frac{1}{1+a+b} \right)^\top.$$

Dieses Resultat ist im Übrigen schon recht lange bekannt. Bereits 1921 beschäftigte sich ÉMILE BOREL mit der Darstellung der Gleichgewichts-Strategien symmetrischer  $3 \times 3$  - Matrixspiele [Bor 1921].

Der Erwartete Transfer des Spiels beträgt

$$ET(\Gamma) = \begin{pmatrix} \frac{b}{1+a+b} & \frac{a}{1+a+b} & \frac{1}{1+a+b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ a & b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{b}{1+a+b} \\ \frac{a}{1+a+b} \\ \frac{1}{1+a+b} \end{pmatrix} = \frac{6ab}{(1+a+b)^2}.$$

Betrachten wir nun das nicht-degenerierte Spiel  $\Gamma_{\text{WIT}}(x)$  mit  $x \in (0, 1)$ . Die beiden Gleichgewichts-Strategien  $(\bar{p}, \bar{q})$  des Spiels haben, wegen der Symmetrie und wegen Satz 1.2.6 (S. 16), den gleichen Träger:  $\text{supp}(\bar{p}) = \text{supp}(\bar{q})$ .

Angenommen, die Gleichgewichte hätten Trägermächtigkeit 1. Dann müsste mindestens ein Diagonalelement von  $A(x)$  das Maximum der Elemente in seiner Spalte sein. Dies ist auf Grund der von  $a, b > 0$  und  $x \in (0, 1)$  vorgegebenen Vorzeichen aber nicht möglich. Daher gibt es kein reines Gleichgewicht.

Für die Annahme, die Gleichgewichte hätten Trägermächtigkeit 2, führen die gleichen Ausführungen wie bei der Überprüfung der Degeneriertheit (S. 52 unten) zum Widerspruch.

Demnach ist das Gleichgewicht für das Bimatrixspiel  $\Gamma_{\text{WIT}}(x)$  eindeutig bestimmt und es gilt:  $\text{supp}(\bar{p}) = \text{supp}(\bar{q}) = 3$ . Nach Satz 1.2.2 (S. 15) können wir die Gleichgewichts-Strategien durch Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}(A^\top(x)p)_1 &= (A^\top(x)p)_2 \\ (A^\top(x)p)_1 &= (A^\top(x)p)_3\end{aligned}$$

bestimmen ( $p \in \Sigma_3$ ) und im Anschluss den Erwarteten Transfer berechnen. Diese Berechnung wurde erneut mit Hilfe der Software Matlab durchgeführt.

Die Argumentation für die Nicht-Degeneriertheit und Eindeutigkeit der Gleichgewichte der Spiele  $\Gamma_{\text{LoB}}(x), \Gamma_{\text{LoT}}(x), \Gamma_{\text{WiB}}(x), \Gamma_{\text{BiT}}(x)$  und  $\Gamma_{\text{BiB}}(x)$  verläuft analog. Wir bemerken, dass für den Prozentsatz  $x = 1$  degenerierte Bimatrixspiele entstehen. Deshalb schließen wir den Fall  $x = 1$  in den Theoremen 3.2.1 und 3.2.2 aus. Die Aussage (i) der beiden Theoreme ist gezeigt.

Die Tabellen A.5 - A.7 in Anhang A.2 (ab S. 83) zeigen die vollständigen Ergebnisse für nicht-degenerierte, symmetrische  $3 \times 3$  - Matrixspiele mit gemischtem Gleichgewicht. Für die sechs Szenarien sind die Auszahlungsmatrizen, die Gleichgewichts-Strategien, die erwarteten Auszahlungen sowie der Erwartete Transfer (mit Ableitung und relativer Steigung) angegeben. Auch diese Resultate wurden mit Hilfe der Software Matlab erstellt. (Siehe dazu die Informationen in Anhang A.4 (S. 101) und den Quellcode auf der beigefügten CD.)

Hier genügt es, von diesen Ergebnissen lediglich den Erwarteten Transfer für die jeweiligen Szenarien, in Abhängigkeit des Prozentsatzes  $x$  aufzuführen. Die Aussage (ii) des Theorems 3.2.2 resultiert sofort.

$$ET(\Gamma_{\text{WiT}}(x)) = ET(\Gamma_{\text{LoB}}(x)) = \frac{2ab(x^2 - 3x + 3)}{(x^2 - 2x + 2)(a + b + ab) + (1 - x)(a^2 + b^2 + 1)}$$

$$ET(\Gamma_{\text{LoT}}(x)) = ET(\Gamma_{\text{WiB}}(x)) = \frac{2ab(x^2 + 3x + 3)}{(x^2 + 2x + 2)(a + b + ab) + (1 + x)(a^2 + b^2 + 1)}$$

$$ET(\Gamma_{\text{BiT}}(x)) = ET(\Gamma_{\text{BiB}}(x)) = \frac{2ab(x^2 + 12)}{2(4 + x^2)(a + b + ab) + (4 - x^2)(a^2 + b^2 + 1)}$$

Der Erwartete Transfer in den sechs Szenarien ist für  $x \in [0, 1)$  stetig differenzierbar. Wir zeigen Aussage (iii) des Theorems 3.2.2 exemplarisch für das Szenario „Winner Tax“. Dazu beweisen wir, dass die erste Ableitung

$$\frac{d ET(\Gamma_{\text{WiT}}(x))}{d x} = \frac{2abx(x - 2)(-a^2 - b^2 + a + b + ab - 1)}{((x^2 - 2x + 2)(a + b + ab) + (1 - x)(a^2 + b^2 + 1))^2}$$

für alle  $x \in (0, 1)$  stets positiv oder, für das Spiel 1 (Stein-Schere-Papier, S. 9), konstant Null ist. Wegen der Übereinstimmung  $ET(\Gamma_{\text{WiT}}(x)) = ET(\Gamma_{\text{LoB}}(x))$  folgt das Gleiche unmittelbar auch für das Szenario „Loser Bonus“.

Es gilt:

$$\frac{d ET(\Gamma_{\text{WiT}}(x))}{d x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2abx(x - 2)(-a^2 - b^2 + a + b + ab - 1) \geq 0.$$

Die letzte Ungleichung ist erfüllt, da  $f(a, b) = (-a^2 - b^2 + a + b + ab - 1) \leq 0$  (nach Lemma 3.2.3, S. 50) und  $2abx(x - 2) < 0$ . Wir bemerken, dass nur im Fall  $a = b = 1$ , d.h. für das Spiel 1 (Stein-Schere-Papier, S. 9), der Erwartete Transfer in der Bimatrixsituation konstant ist und mit dem Erwarteten Transfer des Ausgangsspiels übereinstimmt. Man rechnet leicht nach, dass für dieses Spiel der Erwartete Transfer konstant  $\frac{2}{3}$  beträgt.

Analog zeigt man die strenge Monotonie des Erwarteten Transfers in  $x \in (0, 1)$  für die hier nicht behandelten Szenarien. Man findet die Beweise in Anhang A.2.2 (S. 86). Damit ist Aussage (iii) des Theorems 3.2.2 sowie Aussage (ii) des Theorems 3.2.1 gezeigt.

Wir zeigen schlussendlich die Aussage (iv) des Theorems 3.2.2 in drei Schritten. Dazu schließen wir den Fall  $a = b = 1$ , d.h. das Spiel 1 (Stein-Schere-Papier, S. 9) aus. Für  $x = 0$  ist die Aussage offensichtlich. Sei  $x \in (0, 1)$  beliebig.

1. Zeige:  $ET(\Gamma_{\text{WiT}}(x)) - ET(\Gamma_{\text{BiT}}(x)) > 0$ .

$$\begin{aligned}
 & ET(\Gamma_{\text{WiT}}(x)) - ET(\Gamma_{\text{BiT}}(x)) \\
 &= \frac{2abx^3(x-4)(-a^2-b^2+a+b+ab-1)}{((4-x^2)(a^2+b^2+1)+2(4+x^2)(a+b+ab))((1-x)(a^2+b^2+1)+((x-1)^2+1)(a+b+ab))} > 0, \text{ denn} \\
 &\quad \bullet \underbrace{2abx^3(x-4)}_{<0 \text{ da } x \in (0,1)} \underbrace{(-a^2-b^2+a+b+ab-1)}_{<0 \text{ nach Lemma 3.2.3}} > 0, \\
 &\quad \bullet (4-x^2)(a^2+b^2+1) + 2(4+x^2)(a+b+ab) > 0 \text{ offensichtlich,} \\
 &\quad \bullet (1-x)(a^2+b^2+1) + ((x-1)^2+1)(a+b+ab) > 0 \text{ offensichtlich.}
 \end{aligned}$$

2. Zeige:  $ET(\Gamma_{\text{BiT}}(x)) - ET(\Gamma_{\text{LoT}}(x)) > 0$ .

$$\begin{aligned}
 & ET(\Gamma_{\text{BiT}}(x)) - ET(\Gamma_{\text{LoT}}(x)) \\
 &= \frac{-2abx^3(x+4)(-a^2-b^2+a+b+ab-1)}{((4-x^2)(a^2+b^2+1)+2(4+x^2)(a+b+ab))((1+x)(a^2+b^2+1)+((x+1)^2+1)(a+b+ab))} > 0, \text{ denn} \\
 &\quad \bullet \underbrace{-2abx^3(x+4)}_{<0 \text{ da } x \in (0,1)} \underbrace{(-a^2-b^2+a+b+ab-1)}_{<0 \text{ nach Lemma 3.2.3}} > 0, \\
 &\quad \bullet (4-x^2)(a^2+b^2+1) + 2(4+x^2)(a+b+ab) > 0 \text{ offensichtlich,} \\
 &\quad \bullet (1+x)(a^2+b^2+1) + ((x+1)^2+1)(a+b+ab) > 0 \text{ offensichtlich.}
 \end{aligned}$$

3. Zeige:  $ET(\Gamma_{\text{LoT}}(x)) - ET(\Gamma) > 0$ .

$$\begin{aligned}
 & ET(\Gamma_{\text{LoT}}(x)) - ET(\Gamma) = \frac{2abx^2(a^2+b^2-a-b-ab+1)}{(a+b+1)^2(((x+1)^2+1)(a+b+ab)+(1+x)(a^2+b^2+1))} > 0, \text{ denn} \\
 &\quad \bullet \underbrace{2abx^2}_{>0} \underbrace{(a^2+b^2-a-b-ab+1)}_{>0 \text{ nach Lemma 3.2.3}} > 0, \\
 &\quad \bullet (a+b+1)^2 > 0 \text{ offensichtlich,} \\
 &\quad \bullet ((x+1)^2+1)(a+b+ab) + (1+x)(a^2+b^2+1) > 0 \text{ offensichtlich.}
 \end{aligned}$$

Damit ist auch Aussage (iv) des Theorems 3.2.2 gezeigt. ■

### 3.2.3. Bemerkungen, Gegenbeispiel und experimentelle Ergebnisse

#### Bemerkung 3.2.4 (Beziehung „Winner Tax“ und „Winner Bonus“)

Wir wissen, dass die Szenarien „Winner Tax“ und „Loser Bonus“, bzw. die Szenarien „Loser Tax“ und „Winner Bonus“ in einem direkten Zusammenhang stehen, weil sie jeweils den gleichen Erwarteten Transfer liefern (siehe Theoreme 3.2.1, 3.2.2 ab S. 49).

Doch auch die Szenarien „Winner Tax“ und „Winner Bonus“ (bzw. „Loser Tax“ und „Loser Bonus“) stehen in Beziehung zueinander. Genau wie in der Bemerkung 3.1.9 (S. 39) für faire  $2 \times 2$ -Spiele beschrieben, erkennt man auch für die symmetrischen  $3 \times 3$ -Matrixspiele mit gemischtem Gleichgewicht, dass man den zulässigen Prozentsatz im Szenario „Winner Tax“ auf das Intervall  $x \in (-1, 1)$  ausdehnen kann. Der Bereich  $x \in (-1, 0)$  entspricht dann dem Szenario „Winner Bonus“. Sei

$$ET(x) = \frac{2ab(x^2 - 3x + 3)}{(x^2 - 2x + 2)(a + b + ab) + (1 - x)(a^2 + b^2 + 1)}.$$

Insbesondere erhält man (vgl. Angaben im Beweis zu Theorem 3.2.2 auf S. 54)

$$ET(x) = ET(\Gamma_{\text{WiT}}(x)) = ET(\Gamma_{\text{WiB}}(-x)).$$

Die Funktion  $ET(x)$  ist für  $x \in (-1, 1)$  stetig differenzierbar und besitzt ein lokales Minimum in  $x = 0$ .

Die Abbildung 3.6 illustriert den Zusammenhang für das in Kapitel 3.2.1 diskutierte Spiel 6 (S. 46) mit  $a = 2$  und  $b = 1$ . Wir sehen die Funktion  $ET(x)$ , in Abhängigkeit von  $x \in (-1, 1)$ . Im Vergleich zur Abbildung 3.5 (S. 47) sehen wir den Erwarteten Transfer  $ET(\Gamma_{\text{WiB}}(x))$  gespiegelt an der Ordinatenachse.

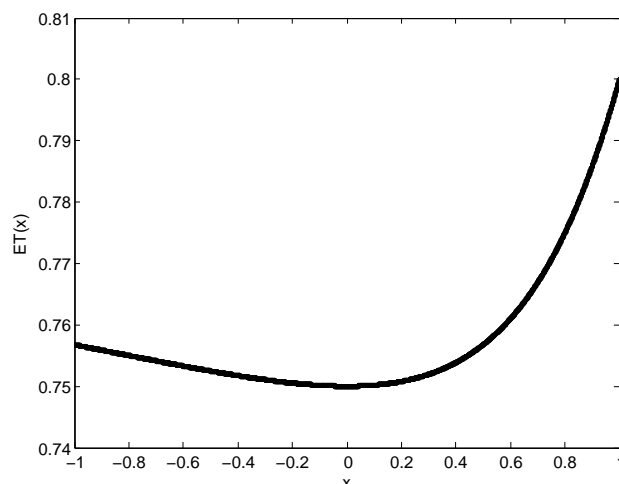


Abbildung 3.6.: Zusammenhang des Erwarteten Transfers in den Szenarien „Winner Tax“ und „Winner Bonus“ für Spiel 6 (S. 46)



**Bemerkung 3.2.5 (zusammengehörige Steuer- und Bonusszenarien)**

Ähnlich wie in Bemerkung 3.1.11 (S. 41) für faire  $2 \times 2$ -Spiele findet man auch für die nicht-degenerierten, symmetrischen  $3 \times 3$ -Matrixspiele mit gemischtem Gleichgewicht eine Beziehung zwischen den Gleichgewichts-Strategien in den zusammengehörigen Steuer- und Bonusszenarien.

Nach einer analogen Rechnung (siehe S. 41) kann man zusammenfassend die Beziehung zwischen dem jeweiligen Steuer- und Bonusszenario wie folgt in Formeln ausdrücken. Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a, b > 0$ .

Es sei  $\Gamma = (A, -A)$  das Matrixspiel mit  $A(a, b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -a \\ -1 & 0 & b \\ a & -b & 0 \end{pmatrix}$ .

Weiter sei  $M$  die Matrix, die aus  $A$  entsteht, in dem von jedem Eintrag aus  $A$  der Absolutbetrag genommen wird:  $M(a, b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$ .

Im Steuerszenario seien die Gleichgewichts-Strategien der beiden Spieler gegeben durch

$$\bar{p}_{\text{Tax}}(a, b; x) = \bar{q}_{\text{Tax}}(a, b; x) = (p_1(a, b; x), p_2(a, b; x), p_3(a, b; x))^\top.$$

Die Gleichgewichts-Strategien der beiden Spieler im dazugehörigen Bonusszenario erhält man, indem zunächst die ersten beiden Einträge dieses Vektors  $\bar{p}_{\text{Tax}}(a, b; x) = \bar{q}_{\text{Tax}}(a, b; x)$  und anschließend, in allen Einträgen, die Rollen von  $a$  und  $b$  vertauscht (vgl. Tabelle A.6, S. 84):

$$\bar{p}_{\text{Bon}}(a, b; x) = \bar{q}_{\text{Bon}}(a, b; x) = (p_2(b, a; x), p_1(b, a; x), p_3(b, a; x))^\top.$$

Der Erwartete Transfer ist jeweils symmetrisch in  $a, b$ . D.h man kann die Rollen von  $a$  und  $b$  vertauschen, ohne dass sich eine Änderung im Erwarteten Transfer ergibt. Dies ist, genauso wie in Bemerkung 3.1.11 ausgeführt, entscheidend für die Übereinstimmungen aus Aussage (ii) des Theorems 3.2.1 (S. 49). Sei  $ET_{\text{Tax}}(a, b; x)$  der Erwartete Transfer in einem Steuerszenario und  $ET_{\text{Bon}}(a, b; x)$  der Erwartete Transfer im dazugehörigen Bonusszenario. Dann gilt (vgl. Tabelle A.7, S. 85):

$$ET_{\text{Tax}}(a, b; x) = ET_{\text{Tax}}(b, a; x) = ET_{\text{Bon}}(a, b; x) = ET_{\text{Bon}}(b, a; x).$$

**Bemerkung 3.2.6 (nicht-symmetrisches Gegenbeispiel)**

Die Forderung „ $\Gamma = (A, -A)$  ist ein symmetrisches Matrixspiel“, ist notwendige Voraussetzung für die Gültigkeit der Theoreme 3.2.1 und 3.2.2 (S. 49). Wir betrachten das folgende faire, aber nicht-symmetrische Spiel.

**Spiel 7**  
 $\Gamma = (A, -A)$  mit  $A = \begin{pmatrix} 18 & -6 & -4 \\ -13 & 4 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

Das Spiel 7 ist nicht-degeneriert und hat das eindeutige Gleichgewicht

$$(\bar{p}, \bar{q}) = \left( \left( \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)^\top, \left( \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5} \right)^\top \right).$$

Für alle sechs Szenarien wurden die Prozentsätze  $x \in \{0, 0.01, 0.02, \dots, 0.99\}$  getestet. Es ergaben sich stets Bimatrixspiele mit eindeutigem Gleichgewicht. (Für  $x = 1$  ist dies nicht der Fall.)

Die Abbildung 3.7 gibt Aufschluss über das Verhalten des Erwarteten Transfers in den beiden Szenarien „Winner Tax“ und „Loser Bonus“. Die Tabelle A.8 in Anhang A.2.3 (S. 87) enthält die exakten Ergebnisse für den Standard-Prozentsatz  $x = 0.1$ .

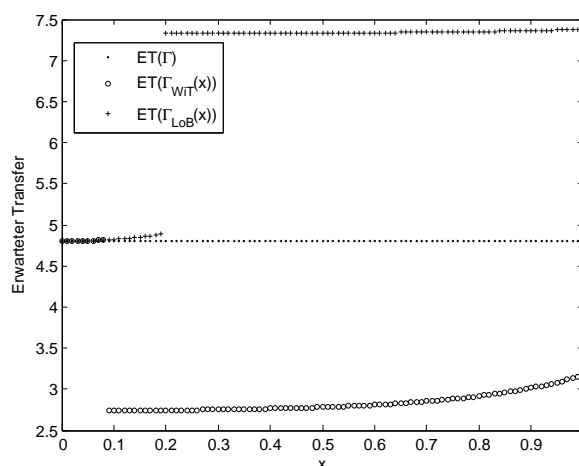


Abbildung 3.7.: Erwarteter Transfer in den Szenarien „Winner Tax“ und „Loser Bonus“ für Spiel 7, in Abhängigkeit vom Prozentsatz  $x$

Wir sehen, dass die Zusammenhänge schon für die beiden Szenarien „Winner Tax“ und „Loser Bonus“ komplizierter werden. Der Erwartete Transfer weist Sprünge auf, die mit einem Wechsel im Träger der Gleichgewichts-Strategien einhergehen. Welche Strukturen für unsere sechs untersuchten Szenarien auftreten können, ist ein noch offenes Problem.

### Bemerkung 3.2.7 (experimentelle Ergebnisse für faire Spiele)

Um herauszufinden, wie sich der Erwartete Transfer im Basismodell „Winner Tax“ und im dazugehörige Bonusszenario „Loser Bonus“ für faire bzw. für zufällige  $3 \times 3$  - Matrixspiele tendenziell verhält, wurde ein Experiment mit Zufalls-Instanzen durchgeführt.

Da dieser Versuch auch in Abschnitt 4.2 (ab S. 67) auftritt, wird er im Folgenden in einer allgemeinen Form formuliert. Je nach dem, um welche Art von zufällig erzeugten Matrix-Spielen es sich handelt, werden wir vom Experiment 1(a), 1(b) oder 1(c) sprechen. (Realisiert wurden alle Versuche mit der Software Matlab. Siehe dazu auch die Informationen in Anhang A.4 (S. 101) und den Quellcode auf der beigelegten CD. )

In der Beschreibung des Experiments tritt der Begriff „Verwerfungsmethode“ auf. Wir meinen die damit üblicherweise definierte Methode nach JOHN VON NEUMANN [Neu 1951]. (Siehe auch Erklärung in Bemerkung 3.1.14 auf S. 44.)

### Experiment 1 (Verhalten des Erwarteten Transfers in den Basis-Szenarien „Winner Tax“ und „Loser Bonus“)

Sei  $n$  die Dimension der betrachteten quadratischen Matrixspiele.

Sei  $N$  die Anzahl der erzeugten zufälligen Instanzen.

- Erzeuge mit der Verwerfungsmethode  $N$  zufällige  $n \times n$  - Matrixspiele mit eindeutigem Gleichgewicht, identischen Trägern der Gleichgewichts-Strategien und einer der folgenden Eigenschaften:

(a) **Symmetrisch.** Ein zufälliges symmetrisches  $n \times n$  - Matrixspiel mit Matrix  $A$  wird erzeugt: Hauptdiagonale von  $A$  mit Einträgen 0, jeder Eintrag der oberen Dreiecksmatrix von  $A$  unabhängig und standardnormalverteilt, untere Dreiecksmatrix entsprechend aufgefüllt (schiefsymmetrisch).

(b) **Fair.** Ein zufälliges faires  $n \times n$  - Matrixspiel mit Matrix  $A$  wird erzeugt: Mit der Verwerfungsmethode wird zunächst ein Spiel  $\Gamma'$  mit zufälliger Matrix  $A'$  (jeder Eintrag unabhängig, standardnormalverteilt) und eindeutigem Gleichgewicht erzeugt. Anschließend wird von jedem Eintrag der Matrix  $A'$  der Spielwert  $\bar{v}'$  des Spiels  $\Gamma'$  abgezogen. So entsteht die Matrix  $A$ .

(c) **Zufällig.** Ein zufälliges  $n \times n$  - Matrixspiel mit Matrix  $A$  wird erzeugt: jeder Eintrag von  $A$  unabhängig und standardnormalverteilt.

- Pro festem Prozentsatz  $x \in \{0, 0.01, 0.02, \dots, 0.99\}$ : Prüfe für jede der  $N$  Instanzen, ob diese in den Basis-Szenarien ein eindeutiges Gleichgewicht hat. Falls ja, berechne den Erwarteten Transfer.
- Pro festem  $x$ : Bestimme unter den Instanzen mit eindeutigem Gleichgewicht in beiden Basis-Szenarien den relativen Anteil der Instanzen mit

$$* ET(\Gamma_{WiT}(x)) \geq ET(\Gamma)$$

$$* ET(\Gamma_{LoB}(x)) \geq ET(\Gamma)$$

$$* ET(\Gamma_{WiT}(x)) = ET(\Gamma_{LoB}(x)).$$

(Bei der Überprüfung auf Gleichheit wird eine Toleranz von  $\pm 10^{-12}$  zugelassen.)

- Pro festem  $x$ : Bestimme unter den Instanzen mit eindeutigem Gleichgewicht in beiden Basis-Szenarien den durchschnittlichen Quotienten

$$* \frac{ET(\Gamma_{WiT}(x))}{ET(\Gamma)}$$

$$* \frac{ET(\Gamma_{LoB}(x))}{ET(\Gamma)} .$$

(Falls Instanzen mit  $ET(\Gamma) = 0$  und eindeutigem Gleichgewicht in beiden Manipulations-Szenarien vorkommen: Ein Quotient von 1 wird angenommen, falls der Erwartete Transfer auch nach der Manipulation gleich 0 (mit Toleranz  $10^{-12}$ ) beträgt. Andernfalls wird die Instanz nicht beachtet. Gemittelt wird über die verbleibenden Instanzen.)

Für  $n = 3$  und  $N = 10^5$  wurde das Experiment 1(b) durchgeführt. Die Abbildungen 3.8 und 3.9 geben die Ergebnisse grafisch wieder.

In Anhang A.2.4 (S. 88) findet man die entsprechenden Diagramme getrennt nach den Trägermächtigkeiten der Gleichgewichts-Strategien im Ausgangsspiel. Außerdem ist in Tabelle A.9 (S. 89) aufgeführt, wie viele Instanzen für festen Prozentsatz  $x$  kein eindeutiges Gleichgewicht in den beiden Basis-Szenarien „Winner Tax“ und „Loser Bonus“ lieferten. Man findet auch, wie viele Instanzen bei der Quotientenbildung  $\frac{ET(\Gamma_{\text{WiT}}(x))}{ET(\Gamma)}$  bzw.  $\frac{ET(\Gamma_{\text{LoB}}(x))}{ET(\Gamma)}$  gesondert behandelt wurden (gemäß Beschreibung des Experiments 1 auf der vorherigen Seite).

Es ist zu erwähnen, dass schon ab dem Steuersatz  $x = 0.12$  Instanzen ohne eindeutigen Gleichgewicht in beiden Basis-Szenarien vorkamen. Bei  $x = 0.98$  traten 162 (von  $10^5$ ) solcher Fälle auf. Ein noch offenes Problem ist die Angabe von Bedingungen, welche die Existenz eines eindeutigen Gleichgewichts nach einer unserer Manipulationen gewährleisten.

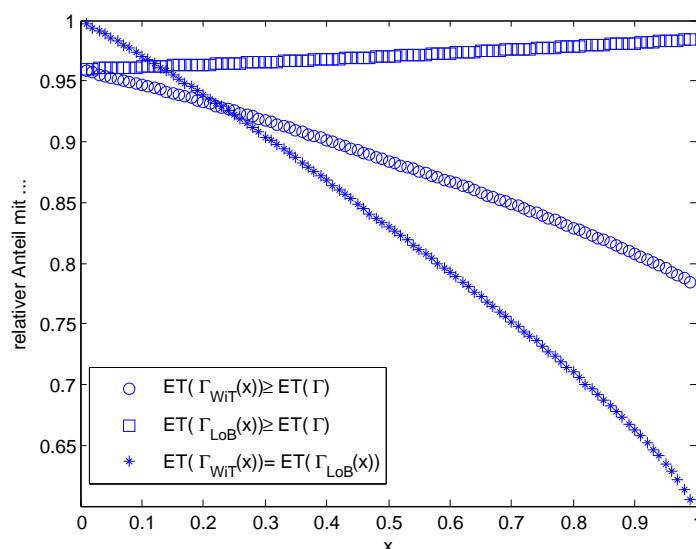


Abbildung 3.8.: prozentualer Anteil der **fairen**  $3 \times 3$  - Testinstanzen mit wachsendem oder gleich bleibendem Erwarteten Transfer in den Basis-Szenarien

Wir sehen, dass in diesem Experiment der Anteil der Instanzen mit wachsendem oder gleich bleibendem Erwarteten Transfer nach **Gewinn-Besteuerung** monoton fallend in  $x \in (0, 1)$  ist. Dennoch fällt er nicht unter 78%. Das Phänomen eines nicht fallenden Erwarteten Transfers liegt also in mehr als drei Viertel der Fälle für jeden Steuersatz  $x \in (0, 1)$  vor. Der Anteil der Instanzen mit wachsendem oder gleich bleibendem Erwarteten Transfer nach **Bonuszugabe bei Verlust** ist dagegen sogar monoton wachsend in  $x \in (0, 1)$  und stets größer als 95%. Außerdem sieht man, dass der Anteil der Instanzen, in denen der Erwartete Transfer für beide Szenarien übereinstimmt, mit wachsendem Prozentsatz  $x$  abnimmt. Er fällt im Experiment aber nicht unter 60%.

**Die Abbildung 3.8 deutet zusammenfassend darauf hin, dass in den Basis-Szenarien (WiT, LoB) die Phänomene bezüglich des Erwarteten Transfers für zufällige faire  $3 \times 3$  - Matrixspiele zwar nicht im vollen Umfang, aber dennoch tendenziell erfüllt sind.**

Betrachtet man die relative Änderung im Erwarteten Transfer, so scheinen die Instanzen mit einem sinkenden Erwarteten Transfer nach Steuerabgabe etwas mehr zu Buche zu schlagen als jene mit einem Anstieg im Transfer. Die Abbildung 3.9 zeigt, dass der Quotient aus dem Erwarteten Transfer nach und vor der **Steuermanipulation** etwas unter 1 (zwischen 0.95 und 1) liegt. Bemerkte sei, dass etwa 30% der zufälligen fairen Spiele ein reines Gleichgewicht hatten, das sich unter Manipulation nicht änderte. Der Erwartete Transfer war in diesen Fällen konstant Null. Bei der Berechnung der durchschnittlichen relativen Änderung gingen diese Fälle mit einem Quotienten von 1 ein.

Der Quotient im **Bonusszenario** ist wachsend und erreicht beim Prozentsatz  $x = 0.99$  sogar einen Wert deutlich über 3. Die Analyse und Erklärung der hier erkennbaren Sprünge ist ein noch offenes Problem. Außerdem ist offen, welche Instanzen typischerweise zu einem Anstieg im Erwarteten Transfer führen, und welche zu einer Abnahme.

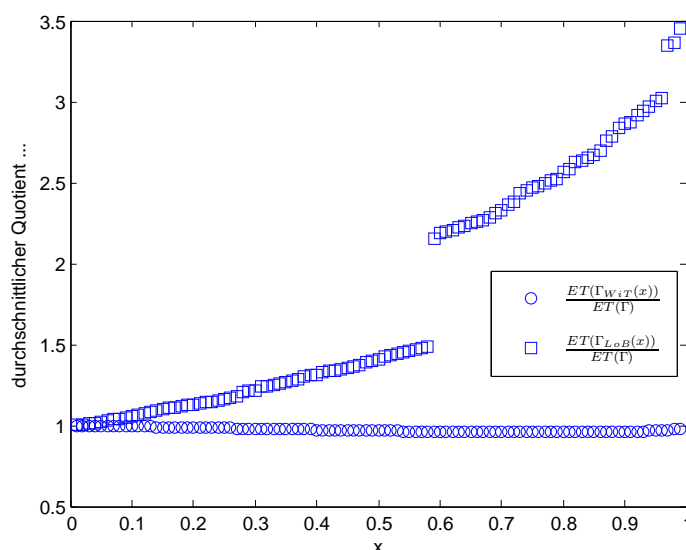


Abbildung 3.9.: durchschnittlicher Quotient aus dem Erwarteten Transfer nach und vor Manipulation für die **fairen**  $3 \times 3$  - Testinstanzen und die Basis-Szenarien

### Bemerkung 3.2.8 (experimentelle Ergebnisse für zufällige Spiele)

Natürlich ist auch interessant, wie sich der Erwartete Transfer in den Basis-Szenarien für zufällige  $3 \times 3$  - Matrixspiele, mit beliebigem Spielwert, tendenziell verhält. Dazu wurde das Experiment 1(c) (S. 59) mit  $n = 3$  und  $N = 10^5$  durchgeführt. Die Abbildung 3.10 gibt die Ergebnisse grafisch wieder.

In Anhang A.2.4 (S. 90) kann man die entsprechenden Diagramme getrennt nach den Trägermächtigkeiten der Gleichgewichts-Strategien im Ausgangsspiel finden.

Außerdem ist in Tabelle A.10 (S. 91) aufgeführt, wie viele Instanzen für festen Prozentsatz  $x$  kein eindeutiges Gleichgewicht in den beiden Basis-Szenarien „Winner Tax“ und „Loser Bonus“ lieferten. Ab  $x = 0.14$  kamen derartige Fälle vor. Bei  $x = 0.99$  waren es 177 (von  $10^5$ ). Die Quotientenbildung  $\frac{ET(\Gamma_{WiT}(x))}{ET(\Gamma)}$  bzw.  $\frac{ET(\Gamma_{LoB}(x))}{ET(\Gamma)}$  war hier hingegen für alle Instanzen problemlos möglich, denn es kamen keine zufälligen Spiele mit  $ET(\Gamma) = 0$  vor.

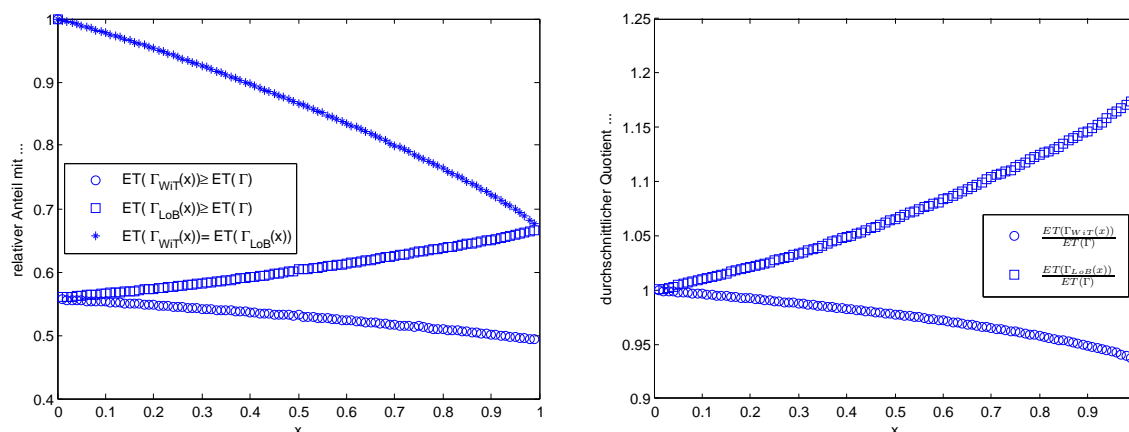


Abbildung 3.10.: Ergebnisse des Experiments 1(c) für **zufällige**  $3 \times 3$  - Spiele: alle Test-Instanzen

Der Anteil der zufälligen Spiele mit wachsendem oder gleich bleibendem Erwarteten Transfer nach **Gewinn-Besteuerung** ist auch in diesem Experiment monoton fallend in  $x \in (0, 1)$ . Für die untersuchten Prozentsätze  $x$  fällt er ab einem Wert von  $x = 0,92$  unter 50%. Das Phänomen eines nicht fallenden Erwarteten Transfers liegt dennoch für kleine Steuersätze  $x$  in mehr als der Hälfte der Fälle vor (zwischen 50% und 56%). Dazu sei allerdings erwähnt, dass etwa 30% der zufällig erzeugten Instanzen ein eindeutiges Gleichgewicht hatte, das sich unter Manipulation der Auszahlungen nicht änderte. Der Erwartete Transfer war in diesen Fällen konstant Null.

Die rechte Abbildung zeigt, dass der Quotient aus dem Erwarteten Transfer nach und vor der Steuermanipulation unter 1 liegt. Bei den Spielen mit einem fallenden Erwarteten Transfer scheint demnach die relative Transferänderung größer zu sein als bei den Instanzen, für die der Erwartete Transfer zunimmt.

Der Anteil der zufälligen Spiele mit wachsendem oder gleich bleibendem Erwarteten Transfer nach **Bonuszugabe bei Verlust** ist dagegen monoton wachsend in  $x \in (0, 1)$ . Im Experiment ist er stets größer als 55%.

Hier ist die durchschnittliche relative Änderung im Erwarteten Transfer monoton wachsend in  $x$  und liegt sogar für alle  $x \in (0, 1)$  über 1. Es sind keine Sprungstellen vorhanden (vgl. Abbildung 3.9, S. 61). Offenbar kommen derartige Sprünge bei zufälligen Instanzen mit beliebigem Spielwert nicht vor, während sie für zufällige faire Instanzen größerer Dimensionen (ab  $n = 3$ ) die Regel zu sein scheinen. Diese Vermutung ergibt sich passend zu den Ergebnissen der zufälligen  $2 \times 2$  - Spiele aus Bemerkung 3.1.14 (ab S. 44) und den Experimenten für größere Dimensionen aus Abschnitt 4.2 (ab S. 67).

Außerdem sieht man, dass offenbar auch für zufällige  $3 \times 3$  - Matrixspiele der Anteil der Instanzen, in denen der Erwartete Transfer für beide Szenarien übereinstimmt, mit wachsendem Prozentsatz  $x$  abnimmt. Er fällt hier aber nicht unter 67%.

**Die Abbildung 3.10 zeigt, dass für zufällige  $3 \times 3$  - Matrixspiele die Phänomene bezüglich des Erwarteten Transfers in den Basis-Szenarien (WiT, LoB) nicht im vollen Umfang, aber tendenziell, besonders für kleine Prozentsätze  $x$ , erfüllt sind.**

## 4. Experimentelle Ergebnisse für Matrixspiele höherer Dimension

Die in Kapitel 3 analysierten Phänomene bezüglich des Erwarteten Transfers gelten für Matrixspiele mit quadratischen Matrizen größerer Dimension offenbar nicht mehr im vollen Umfang. Schon für nicht-degenerierte, symmetrische  $4 \times 4$  - Spiele lassen sich Gegenbeispiele finden. Wir betrachten in diesem Kapitel nur die Basis-Szenarien „Winner Tax“ und „Loser Bonus“. Im Abschnitt 4.1 werden zunächst 4- und 5-dimensionale Gegenbeispiele für den nicht-degenerierten symmetrischen Fall angegeben. Im anschließenden Abschnitt 4.2 werden einige experimentelle Ergebnisse für symmetrische und faire quadratische Matrixspiele der Dimensionen 4 und 5 vorgestellt. Diese deuten darauf hin, dass eine Tendenz zum häufigen Vorkommen der beobachteten Phänomene existiert.

### 4.1. Symmetrische Gegenbeispiele der Dimension 4 und 5

Für die in diesem Kapitel aufgeführten Gegenbeispiele wurden die beiden Basis-Szenarien „Winner Tax“ und „Loser Bonus“ jeweils mit den Prozentsätzen  $x \in \{0.01, 0.02, \dots, 0.99\}$  getestet.

Wir betrachten das folgende 4-dimensionale symmetrische Matrixspiel.

**Spiel 8**  
 $\Gamma = (A, -A)$  mit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -5 & 1 \\ -6 & 0 & 4 & -3 \\ 5 & -4 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ .

Dieses Spiel ist nicht-degeneriert und besitzt die eindeutigen Gleichgewichts-Strategien

$$\bar{p} = \bar{q} = \left( \frac{4}{15}, \frac{5}{15}, \frac{6}{15}, 0 \right)^\top.$$

Mit einer Ausnahme liefern die beiden Basis-Szenarien „Winner Tax“ und „Loser Bonus“ für jeden Prozentsatz  $x \in \{0.01, 0.02, \dots, 0.99\}$  ein Bimatrixspiel mit eindeutigem Nash-Gleichgewicht. Für  $x = 0.08$  ist dies nicht der Fall. Das Bimatrixspiel  $\Gamma_{\text{WT}}(0.08)$  hat kein eindeutiges Gleichgewicht.

Die Abbildung 4.1 gibt Aufschluss über das Verhalten des Erwarteten Transfers in den beiden Basis-Szenarien (WiT, LoB). Die Tabelle A.11 in Anhang A.3.1 (S. 92) zeigt die Ergebnisse für den Standard-Prozentsatz  $x = 0.1$ .

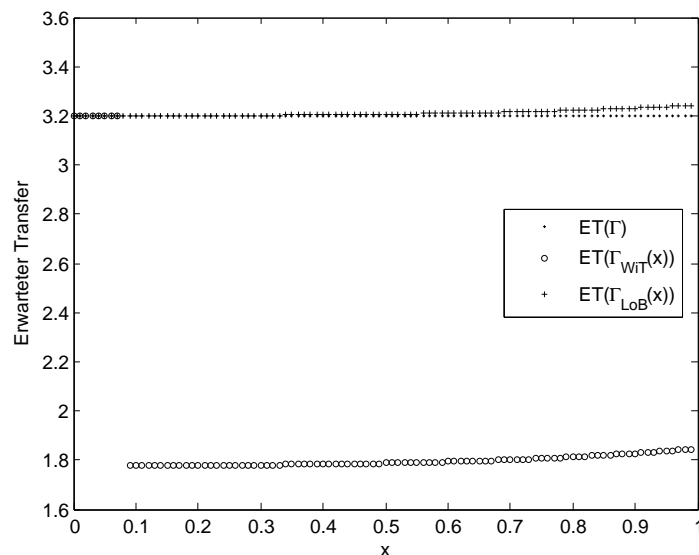


Abbildung 4.1.: Erwarteter Transfer in den Szenarien „Winner Tax“ und „Loser Bonus“ für Spiel 8, in Abhängigkeit vom Prozentsatz  $x$

Der Erwartete Transfer im Szenario „**Winner Tax**“ hat bei  $x = 0.08$  offenbar eine Sprungstelle. Für Prozentsätze kleiner als  $x = 0.08$  haben die Gleichgewichts-Strategien den Träger  $\text{supp}(\bar{p}) = \text{supp}(\bar{q}) = \{1, 2, 3\}$ . Für Steuersätze größer als  $x = 0.08$  haben die Gleichgewichts-Strategien den Träger  $\text{supp}(\bar{p}) = \text{supp}(\bar{q}) = \{2, 3, 4\}$ . In  $x = 0.08$  hat das Bimatrixspiel  $\Gamma_{\text{WiT}}(x)$  drei Gleichgewichte: eins mit Trägermächtigkeit 4 ( $\text{supp}(\bar{p}) = \text{supp}(\bar{q}) = \{1, 2, 3, 4\}$ ) und zwei mit Trägermächtigkeit 3 (eins mit  $\text{supp}(\bar{p}) = \text{supp}(\bar{q}) = \{1, 2, 3\}$  und eins mit  $\text{supp}(\bar{p}) = \text{supp}(\bar{q}) = \{2, 3, 4\}$ ). Daher ist an der Stelle  $x = 0.08$  kein Wert für den Erwarteten Transfer im Szenario „Winner Tax“ abgetragen.

Das Szenario „**Loser Bonus**“ liefert, für alle getesteten Prozentsätze, Bimatrixspiele mit eindeutigen Gleichgewichten. Die Gleichgewichts-Strategien dieser Spiele haben den Träger  $\text{supp}(\bar{p}) = \text{supp}(\bar{q}) = \{1, 2, 3\}$ .

Diese Beobachtungen legen die Vermutung nahe, dass mit steigendem Prozentsatz Wechsel im Träger der Gleichgewichts-Strategien auftreten können, die sich wiederum auf den Verlauf des Erwarteten Transfers auswirken. Eine genaue Analyse diesbezüglich steht noch aus. (Vergleiche auch Abbildung 3.7 auf S. 58.) Ein offenes Problem ist, was für die (Nicht-) Eindeutigkeit der Gleichgewichte in den Manipulations-Szenarien notwendig ist. Außerdem ist noch nicht untersucht, welche Beziehungen zwischen all unseren sechs betrachteten Manipulations-Szenarien vorkommen können.

Man könnte auf die Idee kommen, dass das hier betrachtete 4-dimensionale Spiel 8 eine Ausnahme darstellt, weil es Gleichgewichts-Strategien besitzt, die nicht die Trägermächtigkeit 4 haben. Dazu sei die folgende Bemerkung gemacht.



**Bemerkung 4.1.1**

Ein  $n \times n$  - Matrixspiel kann nur dann Gleichgewichts-Strategien mit Trägermächtigkeit  $n$  besitzen, wenn  $n$  ungerade ist [Kap 1945, S. 479].

Insbesondere hat jedes nicht-degenerierte, symmetrische  $4 \times 4$  - Matrixspiel Gleichgewichts-Strategien  $(\bar{p}, \bar{q})$  mit  $|\text{supp}(\bar{p})| = |\text{supp}(\bar{q})| \leq 3$ . Doch dies scheint nicht der ausschließliche Grund dafür zu sein, dass die beobachteten Phänomene hier nicht mehr vollständig erfüllt sind.

Für die Dimension 5 gibt es nicht-degenerierte, symmetrische Gegenbeispiele, die Gleichgewichts-Strategien mit 5-elementigem Träger haben und ebenso die beobachteten Phänomene nicht vollständig erfüllen. Als Beispiel betrachten wir das folgende Spiel.

**Spiel 9**  
 $\Gamma = (A, -A)$  mit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -5 & 1 & -1 \\ -6 & 0 & 4 & -3 & 1 \\ 5 & -4 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Dieses Spiel ist nicht-degeneriert und besitzt die eindeutigen Gleichgewichts-Strategien

$$\bar{p} = \bar{q} = \left( \frac{3}{23}, \frac{6}{23}, \frac{8}{23}, \frac{5}{23}, \frac{1}{23} \right)^\top.$$

Bis auf zwei Ausnahmen liefern die beiden Basis-Szenarien „Winner Tax“ und „Loser Bonus“ für jeden Prozentsatz  $x \in \{0.01, 0.02, \dots, 0.99\}$  ein Bimatrixspiel mit eindeutigem Nash-Gleichgewicht. In  $x = 0.29$  hat das Spiel  $\Gamma_{\text{LoB}}(x)$  drei Gleichgewichte. Das Spiel  $\Gamma_{\text{WiT}}(x)$  hat drei Gleichgewichte für  $x = 0.48$ .

In Abbildung 4.2 ist das Verhalten des Erwarteten Transfers für die beiden Basis-Szenarien (WiT, LoB) grafisch dargestellt. Die Tabelle A.12 in Anhang A.3.1 (S. 93) zeigt die Ergebnisse für den Standard-Prozentsatz  $x = 0.1$ .

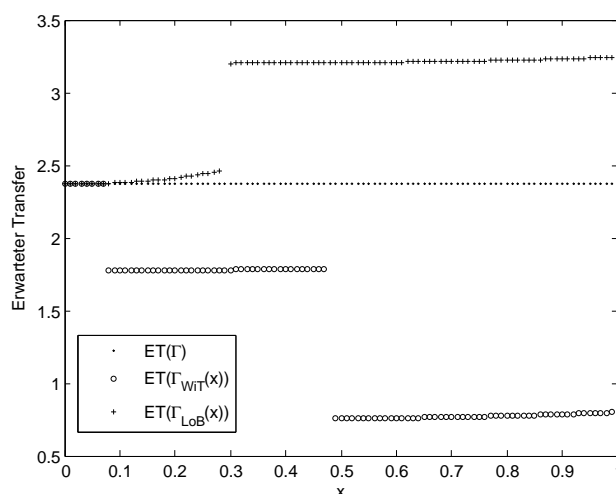


Abbildung 4.2.: Erwarteter Transfer in den Szenarien „Winner Tax“ und „Loser Bonus“ für Spiel 9, in Abhängigkeit vom Prozentsatz  $x$

Für das Szenario „**Losser Bonus**“ hat der Erwartete Transfer einen Sprung in  $x = 0.29$ . Dort ist kein Wert abgetragen, weil das Spiel  $\Gamma_{\text{LoB}}(0.29)$  drei Gleichgewichte hat: eins mit  $\text{supp}(\bar{p}) = \text{supp}(\bar{q}) = \{1, 2, 3\}$ , eins mit  $\text{supp}(\bar{p}) = \text{supp}(\bar{q}) = \{1, 2, 3, 5\}$  und eins mit  $\text{supp}(\bar{p}) = \text{supp}(\bar{q}) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Für die getesteten Prozentsätze mit  $x < 0.29$  haben die Gleichgewichts-Strategien einen 5-elementigen Träger. Hingegen liefern die Spiele  $\Gamma_{\text{LoB}}(x)$  für die Prozentsätze  $x \in \{0.30, 0.31, \dots, 0.99\}$  Gleichgewichte mit dem 3-elementigen Träger:  $\text{supp}(\bar{p}) = \text{supp}(\bar{q}) = \{1, 2, 3\}$ .

In Abbildung 4.2 sehen wir weiterhin, dass der Erwartete Transfer im Szenario „**Winner Tax**“ für das Spiel 9 offenbar zwei Sprungstellen hat. Eine von beiden liegt beim oben erwähnten Steuersatz  $x = 0.48$ . Das Spiel  $\Gamma_{\text{WiT}}(0.48)$  hat drei Gleichgewichte: eins mit  $\text{supp}(\bar{p}) = \text{supp}(\bar{q}) = \{2, 3, 4\}$ , eins mit  $\text{supp}(\bar{p}) = \text{supp}(\bar{q}) = \{3, 4, 5\}$  und eins mit  $\text{supp}(\bar{p}) = \text{supp}(\bar{q}) = \{2, 3, 4, 5\}$ . An der Stelle  $x = 0.48$  ist daher kein Wert für den Erwarteten Transfer im Szenario „Winner Tax“ abgetragen. Der zweite Sprung tritt zwischen  $x = 0.07$  und  $x = 0.08$  auf. Für die Steuersätze  $x \in \{0.01, 0.02, \dots, 0.07\}$  hatten die Gleichgewichte einen 5-elementigen, für  $x \in \{0.08, 0.09, \dots, 0.47\}$  einen 3-elementigen ( $\text{supp}(\bar{p}) = \text{supp}(\bar{q}) = \{2, 3, 4\}$ ) und für  $x \in \{0.49, 0.50, \dots, 0.99\}$  ebenso einen 3-elementigen ( $\text{supp}(\bar{p}) = \text{supp}(\bar{q}) = \{3, 4, 5\}$ ) Träger.

Ein etwas feinerer Test zum Szenario „Winner Tax“ für Steuersätze zwischen  $x = 0.07$  und  $x = 0.08$  (mit  $x \in \{0.071, 0.072, \dots, 0.079\}$ ) ergab, dass die Spiele  $\Gamma_{\text{WiT}}(0.077)$  und  $\Gamma_{\text{WiT}}(0.078)$  drei Gleichgewichte besitzen: eins mit  $\text{supp}(\bar{p}) = \text{supp}(\bar{q}) = \{2, 3, 4\}$ , eins mit  $\text{supp}(\bar{p}) = \text{supp}(\bar{q}) = \{1, 2, 3, 4\}$  und eins mit  $\text{supp}(\bar{p}) = \text{supp}(\bar{q}) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Dies deutet darauf hin, dass es sich eventuell (auch in den vorherigen Beispielen) nicht um punktuelle Sprungstellen handelt, sondern um kleine Intervalle, in denen die Gleichgewichte nicht eindeutig sind. Es ist noch nicht genauer untersucht, inwieweit dies tatsächlich der Fall ist oder ob diese Beobachtung einer numerischen Ungenauigkeit des geschriebenen Matlab-Programms geschuldet ist.

**Zusammenfassend sehen wir an den beiden Beispielen (Spiel 8 und Spiel 9), dass die in Kapitel 3 beobachteten Phänomene für symmetrische Spiele größerer Dimensionen nicht mehr im vollen Umfang erfüllt sind. Man kann Gegenbeispiele angeben.**

Außerdem scheinen die Strukturen und Zusammenhänge komplizierter zu werden (siehe Verlauf des Erwarteten Transfers in den Abbildungen 4.1 und 4.2 auf S. 64 bzw. S 65). Offenbar können Bimatrixspiele ohne eindeutiges Gleichgewicht entstehen. Scheinbar treten **Sprünge im Erwarteten Transfer** dort auf, wo sich Wechsel im Träger der Gleichgewichts-Strategien ergeben. Zwischen so einem Wechsel liegen vermutlich kleine Intervalle von Prozentsätzen, für die das manipulierte Spiel kein eindeutiges Gleichgewicht besitzt.

Genauer formuliert liegt für die beiden Basis-Szenarien „Winner Tax“ und „Losser Bonus“ die folgende Vermutung 4.1.2 nahe. Ob diese Vermutung tatsächlich gilt und wie viele Sprünge maximal auftreten können, ist noch offen.

**Vermutung 4.1.2**

Es sei  $\Gamma = (A, -A)$  ein nicht-degeneriertes  $n \times n$  - Matrixspiel mit  $n \geq 3$ .

Weist der Erwartete Transfer für  $x \in (0, 1)$  im Szenario „Winner Tax“ (bzw. „Loser Bonus“) Sprünge auf, so gilt:

- (i) Die Sprünge treten dort auf, wo das Spiel  $\Gamma_{WiT}(x)$  (bzw.  $\Gamma_{LoB}(x)$ ) kein eindeutiges Gleichgewicht besitzt (eventuell ist dies ein ganzes Teilintervall anstatt einer konkreten Stelle).
- (ii) Für alle Steuersätze  $x$  innerhalb eines Bereichs zwischen zwei benachbarten Sprüngen (bzw. zwischen einem Sprung und dem Rand  $x = 0$  oder  $x = 1$ ) haben die Gleichgewichts-Strategien der Spiele  $\Gamma_{WiT}(x)$  (bzw.  $\Gamma_{LoB}(x)$ ) den gleichen Träger.
- (iii) Die Gleichgewichts-Strategien der Spiele zweier solcher benachbarter, durch einen Sprung getrennten Bereiche haben nicht den gleichen Träger.
- (iv) Das Spiel  $\Gamma_{WiT}(x)$  (bzw.  $\Gamma_{LoB}(x)$ ) habe kein eindeutiges Gleichgewicht und der Prozentsatz  $x$  befinde sich zwischen zwei benachbarten, durch einen Sprung getrennten Bereichen. Dann hat das Spiel u.a. ein Gleichgewicht, das den gleichen Träger hat wie die Spiele im benachbarten linken Bereich. Und es hat u.a. ein Gleichgewicht, das den gleichen Träger hat wie die Spiele im benachbarten rechten Bereich.

## 4.2. Experimentelle Ergebnisse für quadratische Matrixspiele der Dimension 4 und 5

Mit Hilfe eines Zufallsexperiments wurde für größere symmetrische bzw. faire Spiele getestet, in welchem Umfang die in Kapitel 3 beobachteten Phänomene auftreten. Für quadratische Matrixspiele der Dimension  $n = 4$  und  $n = 5$  wurden dazu die Experimente 1(a) und 1(b) (S. 59), mit jeweils  $N = 5 \cdot 10^4$  Test-Instanzen, durchgeführt.

Die Abbildungen 4.3 bis 4.6 auf den folgenden Seiten geben die Ergebnisse grafisch wieder. In Anhang A.3.2 (ab S. 94) kann man zum einen die entsprechenden Diagramme für den 4-dimensionalen Fall auch getrennt nach den Trägermächtigkeiten der Gleichgewichts-Strategien im Ausgangsspiel finden. Zum anderen ist dort für alle durchgeführten Experimente tabellarisch aufgeführt (Tabelle A.13 - Tabelle A.16), wie viele Spiele für festen Prozentsatz  $x$  kein eindeutiges Gleichgewicht in den manipulierten Spielen lieferten. In diesen Tabellen findet man außerdem die Anzahl der Spiele, die bei der Quotientenbildung  $\frac{ET(\Gamma_{WiT}(x))}{ET(\Gamma)}$  bzw.  $\frac{ET(\Gamma_{LoB}(x))}{ET(\Gamma)}$  gesondert behandelt wurden (gemäß Beschreibung des Experiments 1 auf S. 59).

Im folgenden Abschnitt werden zunächst die Resultate für zufällige symmetrische Spiele vorgestellt. Im sich anschließenden Abschnitt werden die Ergebnisse für zufällige faire Matrixspiele präsentiert.

### 4.2.1. Resultate für zufällige symmetrische $4 \times 4$ - und $5 \times 5$ - Matrixspiele

Es wurden 50000 zufällige symmetrische  $4 \times 4$  - Spiele erzeugt. Etwa jeweils die Hälfte davon hatte Trägermächtigkeit 1 bzw. 3. (Siehe auch S. 94.)

Unter allen zufällig erzeugten **symmetrischen**  $4 \times 4$  - Spielen kamen schon für  $x = 0.01$  Instanzen vor (52 von 50000), für die nach Manipulation der Auszahlung kein eindeutiges Gleichgewicht in mindestens einem der beiden Basis-Szenarien „Winner Tax“ oder „Loser Bonus“ vorlag. Bei  $x = 0.99$  waren es 9832, also fast 20% der untersuchten Spiele. Dabei lieferten die Ausgangsspiele mit Trägermächtigkeit 3 den weitaus größeren Anteil von Bimatrixspielen ohne eindeutiges Gleichgewicht. (Siehe auch Tabelle A.13 auf S. 95.)

Diese Eigenschaft konnte man im Übrigen praktisch in allen Experimenten beobachten, die im Rahmen dieser Diplomarbeit durchgeführt wurden: **der Anteil der Spiele ohne eindeutiges Gleichgewicht nach Manipulation steigt offenbar mit zunehmendem Prozentsatz an.**

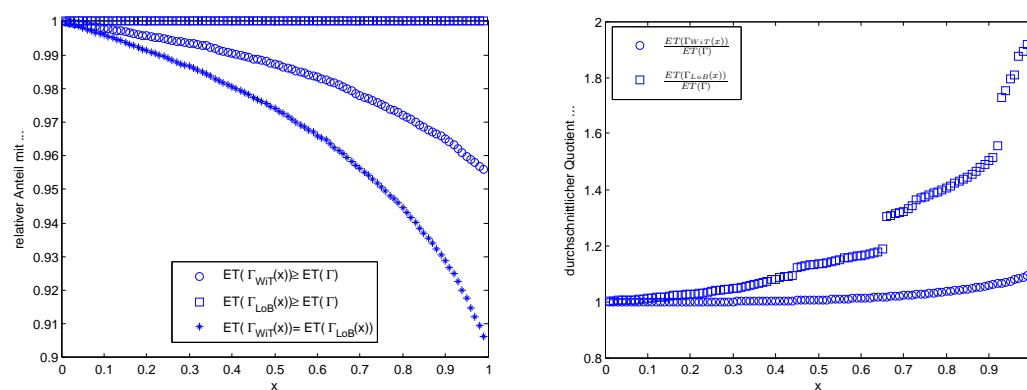


Abbildung 4.3.: Ergebnisse des Experiments 1(a) für zufällige **symmetrische**  $4 \times 4$  - Spiele: alle Test-Instanzen

Die linke Grafik zeigt, dass der Anteil der symmetrischen  $4 \times 4$  - Instanzen mit wachsendem oder gleich bleibendem Erwarteten Transfer nach **Gewinn-Besteuerung** im Experiment monoton fallend in  $x \in (0, 1)$  ist, aber stets über 95% liegt! Zu erwähnen ist allerdings, dass etwa die Hälfte der erzeugten Instanzen ein eindeutiges Gleichgewicht aufwies, das sich unter Manipulation nicht änderte. In diesen Fällen blieb der Erwartete Transfer stets konstant Null (falls Eindeutigkeit des Gleichgewichts gegeben war). Betrachtet man für alle Spiele den durchschnittlichen Quotienten aus dem Erwarteten Transfer nach und vor der Steuermanipulation, so liegt dieser hier leicht über 1!

Interessant ist, dass im Experiment bei allen Instanzen der Erwartete Transfer nach **Bonuszugabe bei Verlust** zunahm oder gleich blieb. Die relative Änderung ist offenbar wachsend in  $x$ . Die Analyse und Erklärung der auftretenden Sprungstellen (rechte Abbildung) steht noch aus.

Außerdem sieht man, dass der Anteil der Instanzen, in denen der Erwartete Transfer für beide Szenarien übereinstimmt, mit wachsendem Prozentsatz  $x$  abnimmt. Im Experiment fällt er nicht unter 90%.

Die 50000 zufällig erzeugten **symmetrischen**  $5 \times 5$  - Spiele lieferten qualitativ ähnliche Ergebnisse zu denen der symmetrischen  $4 \times 4$  - Spiele. (Vgl. Abbildungen 4.3 und 4.4.)

Unter den erzeugten Ausgangsspielen hatten etwas 31% ein reines Gleichgewicht, 63% Gleichgewichts-Strategien mit 3-elementigem Träger und 6% Gleichgewichte mit 5-elementigem Träger. (Siehe auch S. 96.)

Schon für  $x = 0.01$  kamen 149 (von 50000) manipulierte Spiele ohne eindeutigen Gleichgewicht in mindestens einem der beiden Basis-Szenarien vor. Für  $x = 0.99$  waren es mit 20972 sogar mehr als 40% der betrachteten Instanzen! (Siehe auch Tabelle A.14 auf S. 96.)

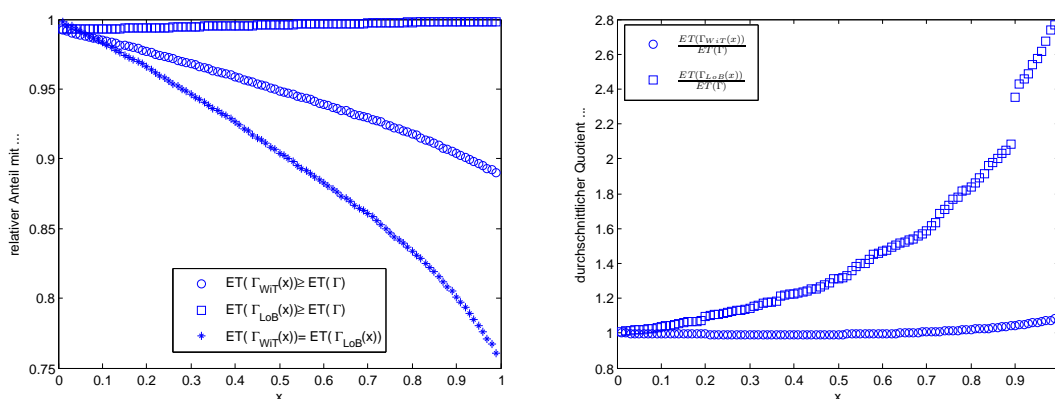


Abbildung 4.4.: Ergebnisse des Experiments 1(a) für zufällige **symmetrische**  $5 \times 5$  - Spiele: alle Test-Instanzen

Das linke Diagramm in Abbildung 4.4 zeigt, dass im Experiment der Anteil der zufälligen symmetrischen  $5 \times 5$  - Spiele mit wachsendem oder gleich bleibendem Erwarteten Transfer im Szenario „**Winner Tax**“ monoton fallend im Steuersatz  $x \in (0, 1)$  ist. Bei  $x = 0.99$  beträgt er aber immer noch etwa 89%! Betrachtet man für alle Spiele den durchschnittlichen Quotienten aus dem Erwarteten Transfer nach und vor der Steuermanipulation, so liegt dieser für kleine Steuersätze stets nahe 1. Bis zu einem Prozentsatz von  $x = 0.64$  ist dieser Quotient im Experiment kleiner als 1. Für größere Prozentsätze übersteigt er die 1, wächst monoton und erreicht bei  $x = 0.99$  einen Wert von 1.08.

Der Anteil der Instanzen, für die der Erwartete Transfer nach **Bonuszugabe bei Verlust** wächst oder gleich bleibt, liegt im Experiment sehr nahe bei 100%. Bei  $x = 0.01$  sind es etwa 99.3%, anschließend steigt dieser relative Anteil noch leicht an. Der durchschnittliche Quotient  $\frac{ET(\Gamma_{LoB}(x))}{ET(\Gamma)}$  ist deutlich wachsend  $x$ . Für große Steuersätze übersteigt er den Wert 2, d.h. der Erwartete Transfer im manipulierten Spiel ist dort im Durchschnitt mehr als doppelt so groß wie der Erwartete Transfer im Ausgangsspiel. Außerdem treten auch hier Sprünge auf. Im Vergleich zur Abbildung 4.3 (für symmetrische  $4 \times 4$  - Spiele) kommen im Verlauf der Kurve aber weniger Sprungstellen vor.

Weiterhin sehen wir erneut (vgl. Abbildung 4.3 links), dass der Anteil der Instanzen, in denen der Erwartete Transfer für die beiden Basis-Szenarien (WiT, LoB) übereinstimmt, mit wachsendem Prozentsatz  $x \in (0, 1)$  abnimmt. Hier beträgt er 76% für  $x = 0.99$ .

**Zusammenfassend deuten die Ergebnisse der beiden Experimente darauf hin, dass die beobachteten Phänomene in den Basis-Szenarien (WiT, LoB) für symmetrische Matrixspiele höherer Dimension zwar nicht vollständig, aber weiterhin für die Mehrzahl der Spiele erfüllt sind.** Auch für große Steuersätze waren die Eigenschaften in der Mehrheit der betrachteten Instanzen noch zu beobachten. Man sollte aber nicht außer Acht lassen, dass recht viele der zufällig erzeugten symmetrischen Spiele ein reines Gleichgewicht lieferten. Die Manipulation dieser Spiele hatte keine Auswirkung auf den Erwarteten Transfer, falls die Eindeutigkeit des Gleichgewichts gewährleistet war. Bei diesen Instanzen passiert also nicht viel, sie haben aber einen positiven Effekt auf das Vorhandensein der untersuchten Phänomene.

**Die Experimente deuten außerdem darauf hin, dass viele symmetrische Matrixspiele dazu neigen, die Eindeutigkeit des Gleichgewichts nach einer unserer Basis-Manipulationen (WiT, WiB) zu verlieren.** Mit wachsendem Prozentsatz nimmt der Anteil solcher Fälle stark zu. Die Resultate des Experiments sind aufgrund der relativ geringen Anzahl der tatsächlich betrachteten Testinstanzen (jene mit eindeutigem Gleichgewicht auch nach Manipulation) natürlich mit Vorsicht zu genießen. Wir erinnern daran, dass im Fall der symmetrischen  $5 \times 5$  - Spiele für den Prozentsatz  $x = 0.99$  nur 29028 Instanzen mit eindeutigem Gleichgewicht nach Manipulation auftraten, die auf die Phänomene untersucht werden konnten. Eine wesentliche Steigerung der Anzahl der Testinstanzen war mit dem geschriebenen Matlab-Programm aber nicht möglich. Das gesamte Experiment 1(a) für  $n = 5$  und  $N = 50000$  beanspruchte etwa 140 Stunden Rechenzeit.

#### 4.2.2. Resultate für zufällige faire $4 \times 4$ - und $5 \times 5$ - Matrixspiele

Im Experiment 1(b) (S. 59) mit  $n = 4$  wurden  $N = 50000$  zufällige faire  $4 \times 4$  - Spiele erzeugt. Etwas mehr als die Hälfte davon hatte Gleichgewichts-Strategien mit Trägermächtigkeit 2, etwa ein Drittel hatte einen 3-elementigen Träger. Spiele mit reinem Gleichgewicht oder 4-elementigem Träger der Gleichgewichts-Strategien traten verhältnismäßig wenig auf. (Siehe auch S. 97.)

Auch hier kamen unter den zufälligen **fairen**  $4 \times 4$  - Spielen Instanzen vor, in denen nach Manipulation der Auszahlung kein eindeutiges Gleichgewicht in mindestens einem der beiden Basis-Szenarien „Winner Tax“ oder „Loser Bonus“ vorlag. Ab  $x = 0.09$  trat dies auf, bei  $x = 0.99$  waren es 577 Spiele, die kein eindeutiges Gleichgewicht lieferten. (Siehe Tabelle A.15 auf S. 99.) Im Vergleich zum Experiment 1(a) aus dem vorherigen Abschnitt, mit symmetrischen  $4 \times 4$  -Spielen, schlägt dies aber kaum ins Gewicht. Dort waren es 9832 Instanzen, die bei  $x = 0.99$  kein eindeutiges Gleichgewicht lieferten.

Die folgende Abbildung gibt die Resultate für das Experiment 1(b) mit  $n = 4$  und  $N = 5 \cdot 10^4$  grafisch wieder. (Siehe auch die entsprechenden Diagramme, getrennt nach der Trägermächtigkeit der Gleichgewichts-Strategien im Ausgangsspiel, in Anhang A.3.2 ab S. 97.)

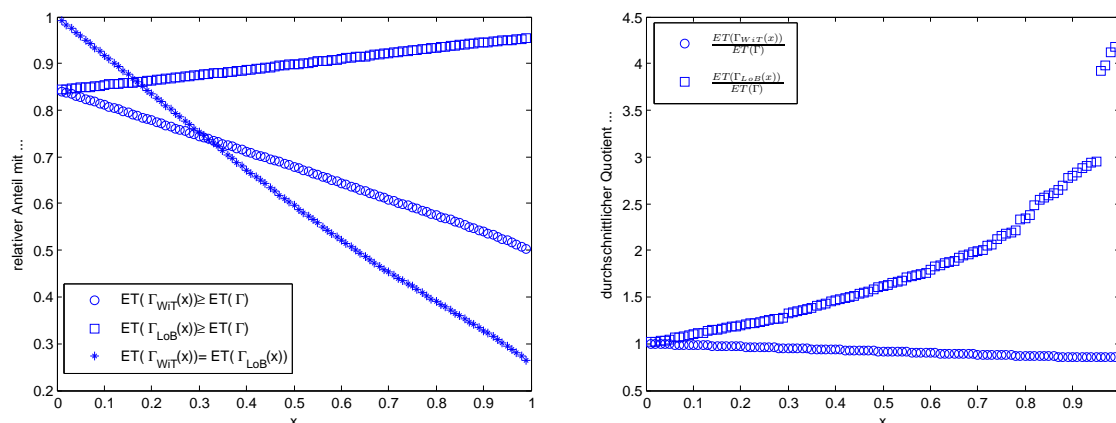


Abbildung 4.5.: Ergebnisse des Experiments 1(b) für zufällige **faire**  $4 \times 4$ -Spiele: alle Test-Instanzen

Das Experiment 1(b) (S. 59) wurde auch mit  $N = 5 \cdot 10^4$  zufälligen **fairen**  $5 \times 5$ -Spiele ( $n = 5$ ) durchgeführt. Etwa 48% der erzeugten Spiele hatte dabei Gleichgewichts-Strategien mit Trägermächtigkeit 3, etwa 32% hatte einen 2-elementigen und etwa 16% einen 4-elementigen Träger. Spiele mit reinem Gleichgewicht oder 5-elementigem Träger der Gleichgewichts-Strategien traten verhältnismäßig wenig auf. (Siehe auch S. 100.)

Ab einem Prozentsatz von  $x = 0.08$  kamen in diesem Experiment Instanzen vor, bei denen nach Manipulation der Auszahlung kein eindeutiges Gleichgewicht in mindestens einem der beiden Basis-Szenarien „Winner Tax“ oder „Loser Bonus“ vorlag. Bei  $x = 0.99$  waren es 2037 Spiele, die kein eindeutiges Gleichgewicht lieferten. (Siehe auch Tabelle A.16 auf S. 100.) Im Vergleich zum Experiment 1(a) aus dem vorherigen Abschnitt, mit zufälligen symmetrischen  $5 \times 5$ -Spiele, ist dies aber ein sehr geringer Anteil. Dort lieferten 20972 Instanzen bei  $x = 0.99$  kein eindeutiges Gleichgewicht.

Die folgende Abbildung zeigt die Resultate des Experiments 1(b) mit  $n = 5$  und  $N = 5 \cdot 10^4$  fairen Testinstanzen.

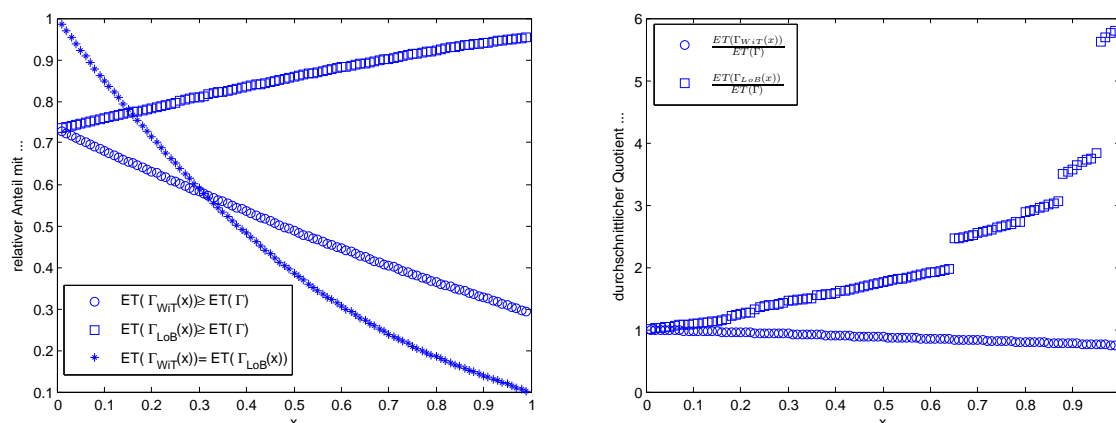


Abbildung 4.6.: Ergebnisse des Experiments 1(b) für zufällige **faire**  $5 \times 5$ -Spiele: alle Test-Instanzen

Qualitativ gesehen, sind sich die beiden Abbildungen 4.5 und 4.6 recht ähnlich. (Vergleiche auch die entsprechenden Diagramme für den 3-dimensionalen Fall auf S. 60 bzw. S. 61.)

Der relative Anteil der zufälligen Spiele mit wachsendem oder gleich bleibendem Erwarteten Transfer nach **Gewinn-Besteuerung** ist in beiden Experimenten monoton fallend in  $x \in (0, 1)$ . Für die zufälligen fairen  $4 \times 4$  - Spiele sinkt er nicht unter 50%! Im Fall der zufälligen  $5 \times 5$  - Spiele beträgt der Anteil der Instanzen mit wachsendem oder gleich bleibendem Erwarteten Transfer beim Steuersatz  $x = 0.99$  aber nur noch etwa 29%. Ab einem Prozentsatz von  $x = 0.48$  fällt er im Experiment mit  $n = 5$  unter die 50%-Marke.

Betrachtet man für alle Spiele den durchschnittlichen Quotienten aus dem Erwarteten Transfer nach und vor der Steuermanipulation, so ist dieser sowohl im 4- als auch im 5-dimensionalen Fall monoton fallend in  $x$ . Für  $x = 0.99$  nimmt er im 4-dimensionalen Fall etwa den Wert 0.86 und im 5-dimensionalen Fall etwa den Wert 0.75 an. Die Instanzen mit einem sinkenden Erwarteten Transfer scheinen also bei der relativen Transferänderung mehr ins Gewicht zu schlagen. Diese Tendenz nimmt offenbar mit wachsendem Steuersatz  $x$  zu.

Der Anteil der Instanzen, für die der Erwartete Transfer nach **Bonuszugabe bei Verlust** wächst oder gleich bleibt, ist hingegen in beiden Experimenten monoton wachsend in  $x \in (0, 1)$ . Für die zufälligen fairen  $4 \times 4$  - Spiele liegt dieser Anteil für  $x = 0.01$  bei etwa 84% und wächst bis auf etwa 95% für  $x = 0.99$ . Im 5-dimensionalen Fall beträgt der Anteil der Instanzen, für die der Erwartete Transfer im Szenario „Loser Bonus“ wächst oder gleich bleibt, in  $x = 0.01$  hingegen nur etwa 73%. Er steigt aber auch bis auf etwa 95% an.

Der durchschnittliche Quotient  $\frac{ET(\Gamma_{\text{LoB}}(x))}{ET(\Gamma)}$  ist sowohl für die fairen  $4 \times 4$  - Spiele als auch für die fairen  $5 \times 5$  - Spiele im Experiment deutlich wachsend in  $x \in (0, 1)$ . Auch hier treten in beiden Fällen Sprungstellen auf. (Vergleiche dazu die Abbildungen 4.3 auf S. 68 und 4.4 auf S. 69. Qualitativ gesehen ähneln sich bei der durchschnittlichen Quotientenbildung im Bonusszenario eher die Ergebnisse für die symmetrischen  $4 \times 4$  - und die fairen  $5 \times 5$  - Spiele. Auch die Resultate für die fairen  $4 \times 4$  - und die symmetrischen  $5 \times 5$  - Spiele ähneln sich hier.) Der durchschnittliche Quotient  $\frac{ET(\Gamma_{\text{LoB}}(x))}{ET(\Gamma)}$  übersteigt für große Steuersätze den Wert 4 im 4-dimensionalen Fall, und den Wert 5 im 5-dimensionalen Fall. (Im 3-dimensionalen Fall überstieg er den Wert 3. Siehe S. 61.) Der Erwartete Transfer im manipulierten Spiel ist dort im Durchschnitt mehr als viermal bzw. fünfmal so groß wie der Erwartete Transfer im Ausgangsspiel!

Schlussendlich sehen wir erneut (vgl. Abbildungen 4.3 und 4.4), dass der Anteil der Instanzen, in denen der Erwartete Transfer für beide Szenarien übereinstimmt, mit wachsendem Prozentsatz  $x$  abnimmt. Im Experiment mit zufälligen fairen  $4 \times 4$  - Spielen sinkt dieser Anteil bis auf etwa 26% für  $x = 0.99$ . Ab einem Prozentsatz von  $x = 0.64$  fällt er unter 50%. Unter den zufällig erzeugten  $5 \times 5$  - Spielen liefern für einen Prozentsatz von  $x = 0.99$  nur noch etwa 10% der Instanzen einen übereinstimmenden Erwarteten Transfer für die beiden Basis-Szenarien (WiT, LoB). Die 50%-Marke wurde hier ab einem Prozentsatz von  $x = 0.39$  unterschritten.



Die Ergebnisse der beiden Experimente aus diesem Abschnitt deuten zusammenfassend darauf hin, dass **die beobachteten Phänomene in den Basis-Szenarien (WiT, LoB) für faire Matrixspiele höherer Dimension nicht vollständig, aber dennoch tendenziell erfüllt sind. Für kleine Prozentsätze waren die Eigenschaften aus Kapitel 3 in der Mehrheit der betrachteten Instanzen zu beobachten.**

Die Experimente deuten außerdem darauf hin, dass auch **bei zufälligen fairen Matrixspielen der Anteil der Spiele ohne eindeutiges Gleichgewicht nach Manipulation (WiT, WiB) mit wachsendem Prozentsatz zunimmt.** Im Vergleich zu den symmetrischen Spielen aus dem vorherigen Abschnitt ist dieser Anteil aber wesentlich geringer.

Die Aussagekraft der Experimente ist, wegen der recht geringen Anzahl der betrachteten Testinstanzen, natürlich begrenzt. Der Grund für die Beschränkung auf  $5 \cdot 10^4$  Testinstanzen liegt in dem erheblichen Rechenaufwand.

Für noch größere quadratische Matrixspiele ist offen, ob sich die Beobachtungen aus den Ergebnissen der Experimente (siehe Abbildungen 4.3 bis 4.6) fortsetzen. Interessant sind zum Beispiel Fragen wie:

- Kann für zufällige faire  $n \times n$  - Spiele der relative Anteil der Instanzen mit wachsendem oder gleich bleibendem Erwarteten Transfer nach Gewinn-Besteuerung auch für sehr kleine Prozentsätze  $x$  unter einen Wert von 50% sinken?
- Kann man die Anzahl der Sprungstellen im Verlauf der Kurve des durchschnittlichen Quotienten  $\frac{ET(\Gamma_{\text{LoB}}(x))}{ET(\Gamma)}$  in Abhängigkeit von der Dimension  $n$  der quadratischen Testspiele angeben?
- Steigt bei zufälligen fairen  $n \times n$  - Spielen der durchschnittliche Quotient  $\frac{ET(\Gamma_{\text{LoB}}(x))}{ET(\Gamma)}$  für große Prozentsätze  $x$  (nahe 1) stets über den Wert  $n$ ?
- Kann man den durchschnittlichen Anteil der symmetrischen bzw. fairen  $n \times n$  - Instanzen ohne eindeutiges Gleichgewicht nach Manipulation (WiT, LoB) in Abhängigkeit von der Dimension  $n$  und vom Prozentsatz  $x$  angeben?

Die Beantwortung dieser Fragen, sowie eine weiterführende, tiefere Analyse der Beobachtungen steht noch aus.

## 5. Zusammenfassung, Diskussion und offene Fragen

Bei fairen Matrixspielen können Steuerabgaben oder Bonuszuschüsse zu einem aggressiveren Spielverhalten führen. Dies äußert sich durch einen Anstieg im Erwarteten Transfer. Außerdem können Steuern oder Boni exakt den gleichen Effekt haben. Es wurde bewiesen, dass diese Phänomene ausnahmslos für bestimmte Spiele kleiner Dimension, nämlich für nicht-degenerierte faire  $2 \times 2$ - und symmetrische  $3 \times 3$ -Matrixspiele, gelten. Für faire Spiele höherer Dimension kann man Gegenbeispiele angeben. Dennoch gibt es eine Tendenz hin zu den beobachteten Phänomenen.

Das gesamte Modell kann auch auf allgemeinere Situationen in der nicht-kooperativen Spieltheorie übertragen werden. Offen ist, was passiert, wenn

- ein Bimatrixspiel als Ausgangsspiel besteuert wird.
- $n$ -Personen-Spiele besteuert werden.
- mehrstufige Spiele (mit konstantem oder progressivem Prozentsatz) besteuert werden.

Hierbei sollte der Transfer als die Summe über die Absolutbeträge der Auszahlungen aller Spieler definiert werden.

Denkbar wäre auch ein entsprechendes Steuermodell in der kooperativen Spieltheorie. Interessant ist dann zum Beispiel die Frage, wie sich eine Besteuerung auf die dort betrachteten Shapley-Werte auswirkt.

Inhaltliche und technische Probleme werden in den allgemeineren Situationen aber kaum geringer werden. An erster Stelle ist zu nennen, dass die Uneindeutigkeit von Gleichgewichten in Bimatrixspielen für das eingeführte Modell problematisch (bzw. interessant) ist. Wie wir gesehen haben, kann „der“ Erwartete Transfer für beliebige Spiele nicht ohne Weiteres definiert werden. Außerdem scheinen Matrixspiele teilweise „empfindlich“ auf verschiedene Steuersätze zu reagieren (siehe Unstetigkeitsstellen in Abbildung 4.2 auf S. 65). Sprünge im Verhalten des Erwarteten Transfers könnten mit dem abrupten Wechsel des Trägers der Gleichgewichts-Strategien zusammenhängen. Eine genaue Analyse diesbezüglich steht noch aus.

Kritisch zu erwähnen ist, dass der beobachtete paradoxe Effekt, besonders im Basisszenario „Winner Tax“, im Durchschnitt quantitativ eher gering ist. Dennoch ist er vorhanden und sollte nicht vernachlässigt werden, wenn man über die Einführung von Steuern diskutiert.

Anknüpfen könnte die gesamte Thematik dabei an den aktuellen Diskurs über die Einführung einer Finanztransaktions-Steuer. Selbstverständlich kann das spieltheoretische Modell, das dieser Diplomarbeit zu Grunde liegt, nicht einfach auf die Situation an Finanzmärkten übertragen werden. Dennoch sollte man vorsichtig sein, wenn man aus Intuition meint, eine Steuer beruhige den Markt und stabilisiere ihn. Die Ergebnisse dieser Arbeit sprechen eine andere Sprache. Interessant sind Fragen wie: Ist es möglich, dass nach Einführung einer Steuer die Akteure noch riskanter spekulieren? Beunruhigt man damit den Markt eher, als dass man ihn unter Kontrolle hält? Wäre eine Transaktions-Steuer auf der anderen Seite eine sichere finanzielle Einnahmequelle? Was wäre gegebenenfalls ein guter Steuersatz, der eine vertretbare Balance zwischen Marktunruhe und Einnahme finanzieller Mittel (die im Idealfall nachhaltig genutzt werden könnten) schafft?

Es gibt im Übrigen wirtschaftliche Studien, die sich mit derartigen Fragen befassen und den angedeuteten Ergebnissen nahe kommen. In diesem Zusammenhang ist beispielsweise der empirische Beleg von STEVEN UMLAUF zu nennen [Uml 1993]. In Schweden wurde 1984 eine Finanztransaktions-Steuer eingeführt. Einerseits konnte sofort beobachtet werden, dass Investoren auf andere, unbesteuerte Handelsplätze auswichen. Das enorm gefallene Handelsvolumen resultierte 1991 schlussendlich in der Abschaffung der Steuer. Andererseits konnte UMLAUF belegen, dass die Preisvolatilität während dieser Zeit nicht abnahm - im Gegensatz zu dem, was ursprünglich vermutet wurde. Auch HABERMEIER und KIRILENKO kommen nach einer theoretischen und experimentellen Analyse zu dem folgenden Schluss: Eine Finanztransaktions-Steuer kann negative Effekte auf die Preisvolatilität und Liquidität haben und führt zu einer verringerten Markteffizienz [HK 2001]. Als weiteres Beispiel kann das Laborexperiment von HANKE, HUBER, KIRCHLER und SUTTER genannt werden [HHKS 2010]. Ein wichtiges Resultat dieses Experiments war, dass die Einführung einer Transaktions-Steuer, entgegen der Hoffnung einiger Steuer-Befürworter, keine Reduzierung der Volatilität zur Folge hatte.

Spricht man über Steuereinführungen, so scheint unser Szenario „Winner Tax“ vielleicht am intuitivsten. In der Finanzwelt kommen aber auch die anderen Modelle vor. Bonuszahlungen für erfolgreich wirtschaftende Händler und Berater („Winner Bonus“) sind durchaus üblich. Auch Situationen, in denen Verluste (teilweise) rückerstattet werden („Loser Bonus“), sind geläufig. Man denke nur an die Rettung von Insolvenz-bedrohten Banken und Ländern. Sogar das Modell „Loser Tax“ tritt in der Realität auf, wenn man psychologische Faktoren in den Auszahlungsfunktionen der Akteure mit modelliert: Nachdem ein Spieler Geld verloren hat, könnte er depressiv werden und so gleich doppelt bestraft sein.

Die gleichzeitige Besteuerung beider Akteure („Bilateral Tax“) käme dem Begriff einer *Transaktions-Steuer* am nächsten. Hier wird die tatsächlich stattfindende Transaktion besteuert. Beide Spieler müssen sich gleichberechtigt daran beteiligen. Auch die zweiseitige Unterstützung durch Bonuszahlungen („Bilateral Bonus“) kann auftreten: Beispielsweise dann, wenn zu Zeiten einer Umsatzflaute der Handel angeregt werden soll.

In den betrachteten Szenarien wurde für beide Spieler stets die gleiche prozentuale Manipulation der Auszahlung angenommen. Was passiert, wenn man unterschiedliche Prozentsätze für die Kontrahenten annimmt, ist noch offen. Diese Ergebnisse könnten im Zusammenhang einer Zwei-Länder-Besteuerung interessant sein.

Die in dieser Arbeit beobachteten Phänomene könnten auch für die Analyse von Spiel- und Wettsteuern relevant sein. Was geschieht, wenn zum Beispiel im Casino, beim Internet-Poker oder bei Sportwetten eine Gewinnsteuer zu entrichten ist? Interessant ist sowohl, wie sich die Akteure in der Realität verhalten als auch, was aus mathematischer Sicht optimal wäre. Regt auch hier eine Besteuerung die Risikobereitschaft der Spieler an? Welche Phänomene sind zu beobachten, wenn man sich auf die transferierten Geldbeträge konzentriert?

Dass die theoretischen mit den in der Realität auftretenden Phänomenen nicht eins zu eins übereinstimmen werden, soll dabei keineswegs abgestritten werden. Der Einwand, dass wir Menschen eben nicht stets und ständig nach der wirtschaftlichen Vorstellung des Homo oeconomicus handeln, ist auch hier berechtigt. Das Modell aus dieser Diplomarbeit ist in dieser Hinsicht selbstverständlich „nur“ ein vereinfachendes Modell.

Die Frage, ob es in unserer Welt tatsächlich vollständig nicht-kooperative und egoistische Spielsituationen gibt, vermögen wir nicht zu beantworten. Die Kritik, ob die Ergebnisse deshalb tatsächlich anwendungsrelevant sind, können wir deshalb auch nicht entkräften. Dennoch konnte in dieser Arbeit gezeigt werden, dass aus Sicht der Mathematik Steuern ganz klar kein Allheilmittel zur Eindämmung von aggressiverem Spielverhalten sind: Bei fairen Matrixspielen führt Besteuerung oft zu einem ansteigenden Transfer.

# A. Anhänge

## A.1. Anlagen zu Abschnitt 3.1 (ab S. 25)

### A.1.1. Ergebnistabellen für faire, nicht-degenerierte $2 \times 2$ - Matrixspiele mit gemischtem Gleichgewicht (zu S. 37)

Spiel	A	B
$\Gamma$	$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{q}{1-q} \\ -\frac{p}{1-p} & \frac{pq}{(1-p)(1-q)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & \frac{q}{1-q} \\ \frac{p}{1-p} & -\frac{pq}{(1-p)(1-q)} \end{pmatrix}$
$\Gamma_{\text{WiT}}(x)$	$\begin{pmatrix} (1-x) & -\frac{q}{1-q} \\ -\frac{p}{1-p} & (1-x)\frac{pq}{(1-p)(1-q)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & (1-x)\frac{q}{1-q} \\ (1-x)\frac{p}{1-p} & -\frac{pq}{(1-p)(1-q)} \end{pmatrix}$
$\Gamma_{\text{LoB}}(x)$	$\begin{pmatrix} 1 & -(1-x)\frac{q}{1-q} \\ -(1-x)\frac{p}{1-p} & \frac{pq}{(1-p)(1-q)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -(1-x) & \frac{q}{1-q} \\ \frac{p}{1-p} & -(1-x)\frac{pq}{(1-p)(1-q)} \end{pmatrix}$
$\Gamma_{\text{LoT}}(x)$	$\begin{pmatrix} 1 & -(1+x)\frac{q}{1-q} \\ -(1+x)\frac{p}{1-p} & \frac{pq}{(1-p)(1-q)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -(1+x) & \frac{q}{1-q} \\ \frac{p}{1-p} & -(1+x)\frac{pq}{(1-p)(1-q)} \end{pmatrix}$
$\Gamma_{\text{WiB}}(x)$	$\begin{pmatrix} (1+x) & -\frac{q}{1-q} \\ -\frac{p}{1-p} & (1+x)\frac{pq}{(1-p)(1-q)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & (1+x)\frac{q}{1-q} \\ (1+x)\frac{p}{1-p} & -\frac{pq}{(1-p)(1-q)} \end{pmatrix}$
$\Gamma_{\text{BiT}}(x)$	$\begin{pmatrix} (1-\frac{1}{2}x) & -(1+\frac{1}{2}x)\frac{q}{1-q} \\ -(1+\frac{1}{2}x)\frac{p}{1-p} & (1-\frac{1}{2}x)\frac{pq}{(1-p)(1-q)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -(1+\frac{1}{2}x) & (1-\frac{1}{2}x)\frac{q}{1-q} \\ (1-\frac{1}{2}x)\frac{p}{1-p} & -(1+\frac{1}{2}x)\frac{pq}{(1-p)(1-q)} \end{pmatrix}$
$\Gamma_{\text{BiB}}(x)$	$\begin{pmatrix} (1+\frac{1}{2}x) & -(1-\frac{1}{2}x)\frac{q}{1-q} \\ -(1-\frac{1}{2}x)\frac{p}{1-p} & (1+\frac{1}{2}x)\frac{pq}{(1-p)(1-q)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -(1-\frac{1}{2}x) & (1+\frac{1}{2}x)\frac{q}{1-q} \\ (1+\frac{1}{2}x)\frac{p}{1-p} & -(1-\frac{1}{2}x)\frac{pq}{(1-p)(1-q)} \end{pmatrix}$

Tabelle A.1.: Auszahlungsmatrizen für faire, nicht-degenerierte  $2 \times 2$  - Spiele mit gemischtem Gleichgewicht und alle sechs Szenarien

Spiel	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$v_1$	$v_2$
$\Gamma$	$\begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix}$	0	0
$\Gamma_{\text{WiT}}(x)$	$\begin{pmatrix} -\frac{p-px+pqx}{px+qx-2pqx-1} \\ \frac{p+qx-pqx-1}{px+qx-2pqx-1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{q-pqx}{px+qx-2pqx+1-x} \\ \frac{px+qx-pqx-q-x+1}{px+qx-2pqx+1-x} \end{pmatrix}$	$\frac{pqx(x-2)}{px+qx-2pqx-1-x}$	$-\frac{pqx(x-2)}{px+qx-2pqx-1}$
$\Gamma_{\text{LoB}}(x)$	$\begin{pmatrix} \frac{p-pqx}{px+qx-2pqx+1-x} \\ \frac{px+qx-pqx-p-x+1}{px+qx-2pqx+1-x} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{q-qx+pqx}{px+qx-2pqx-1} \\ \frac{q+px-pqx-1}{px+qx-2pqx-1} \end{pmatrix}$	$\frac{pqx(x-2)}{px+qx-2pqx+1}$	$-\frac{pqx(x-2)}{px+qx-2pqx+1-x}$
$\Gamma_{\text{LoT}}(x)$	$\begin{pmatrix} \frac{p+pqx}{x-px-qx+2pqx+1} \\ -\frac{px+qx-pqx+p-x-1}{x-px-qx+2pqx+1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{q+qx-pqx}{px+qx-2pqx+1} \\ \frac{px-pqx-q+1}{px+qx-2pqx+1} \end{pmatrix}$	$-\frac{pqx(x+2)}{px+qx-2pqx+1}$	$\frac{pqx(x+2)}{px+qx-2pqx-1-x}$
$\Gamma_{\text{WiB}}(x)$	$\begin{pmatrix} \frac{p+px-pqx}{px+qx-2pqx+1} \\ \frac{qx-pqx-p+1}{px+qx-2pqx+1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{q+pqx}{x-px-qx+2pqx+1} \\ -\frac{px+qx-pqx+q-x-1}{x-px-qx+2pqx+1} \end{pmatrix}$	$-\frac{pqx(x+2)}{px+qx-2pqx-1-x}$	$\frac{pqx(x+2)}{px+qx-2pqx+1}$
$\Gamma_{\text{BiT}}(x)$	$\begin{pmatrix} \frac{px(2p+2q-4pq-1)-2p(2p-1)}{(2p-1)(x(2p+2q-4pq-1)-2)} \\ \frac{(p-1)x(2p+2q-4pq-1)+2(2p^2-3p+1)}{(2p-1)(x(2p+2q-4pq-1)-2)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{qx(2p+2q-4pq-1)+2q(2q-1)}{(2q-1)(x(2p+2q-4pq-1)+2)} \\ \frac{(q-1)x(2p+2q-4pq-1)-2(2q^2-3q+1)}{(2q-1)(x(2p+2q-4pq-1)+2)} \end{pmatrix}$	$-\frac{4pqx}{2px+2qx-4pqx-x+2}$	$\frac{4pqx}{2px+2qx-4pqx-x-2}$
$\Gamma_{\text{BiB}}(x)$	$\begin{pmatrix} \frac{px(2p+2q-4pq-1)+2p(2p-1)}{(2p-1)(x(2p+2q-4pq-1)+2)} \\ \frac{(p-1)x(2p+2q-4pq-1)-2(2p^2-3p+1)}{(2p-1)(x(2p+2q-4pq-1)+2)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{qx(2p+2q-4pq-1)-2q(2q-1)}{(2q-1)(x(2p+2q-4pq-1)-2)} \\ \frac{(q-1)x(2p+2q-4pq-1)+2(2q^2-3q+1)}{(2q-1)(x(2p+2q-4pq-1)-2)} \end{pmatrix}$	$-\frac{4pqx}{2px+2qx-4pqx-x-2}$	$\frac{4pqx}{2px+2qx-4pqx-x+2}$

Tabelle A.2.: Gleichgewichts-Strategien und erwartete Auszahlung für faire, nicht-degenerierte  $2 \times 2$  - Spiele mit gemischtem Gleichgewicht und alle sechs Szenarien

Spiel	$ET(x)$	$\frac{d ET(x)}{d x}$	$\frac{ET(x)}{ET(0)}$
$\Gamma_{\text{WIT}}(x), \Gamma_{\text{LOB}}(x)$	$\frac{-pq(x-2)^2}{x^2(p+q-2pq)(p+q-2pq-1)+x-1}$	$-\frac{pqx(x-2)(4(p+q-2pq)(p+q-2pq-1)+1)}{(x^2(p+q-2pq)(p+q-2pq-1)+x-1)^2}$	$-\frac{(x-2)^2}{4(px+qx-2pqx-1)(px+qx-2pqx+1-x)}$
$\Gamma_{\text{LOT}}(x), \Gamma_{\text{WIB}}(x)$	$\frac{pq(x+2)^2}{-x^2(p+q-2pq)(p+q-2pq-1)+x+1}$	$\frac{pqx(x+2)(4(p+q-2pq)(p+q-2pq-1)+1)}{(-x^2(p+q-2pq)(p+q-2pq-1)+x+1)^2}$	$-\frac{(x+2)^2}{4(px+qx-2pqx+1)(px+qx-2pqx-1-x)}$
$\Gamma_{\text{BIT}}(x), \Gamma_{\text{BIB}}(x)$	$\frac{4pq}{x(2p+2q-4pq-1)+2} - \frac{4pq}{x(2p+2q-4pq-1)-2}$	$\frac{32pqx(2p+2q-4pq-1)^2}{(x(2p+2q-4pq-1)+2)^2(x(2p+2q-4pq-1)-2)^2}$	$\frac{-4}{(x(2p+2q-4pq-1)+2)(x(2p+2q-4pq-1)-2)}$

Tabelle A.3.: Erwarteter Transfer für faire, nicht-degenerierte  $2 \times 2$ - Spiele mit gemischtem Gleichgewicht und alle sechs Szenarien

### A.1.2. Monotonie-Beweise für $2 \times 2$ - Matrixspiele (S. 37)

Wir zeigen Aussage (iii) des Theorems 3.1.7 bzw. Aussage (ii) des Theorems 3.1.6 (S. 32) für:

$$\boxed{1. \Gamma_{\text{LoT}}(x), \Gamma_{\text{WiB}}(x).}$$

Es gilt die Gleichheit:  $ET(\Gamma_{\text{LoT}}(x)) = ET(\Gamma_{\text{WiB}}(x))$ . Außerdem ist  $ET(\Gamma_{\text{LoT}}(x))$  stetig differenzierbar auf  $[0, 1]$ . Wir beweisen, dass die erste Ableitung

$$\frac{d ET(\Gamma_{\text{LoT}}(x))}{d x} = \frac{pqx(x+2)(4(p+q-2pq)(p+q-2pq-1)+1)}{(-x^2(p+q-2pq)(p+q-2pq-1)+x+1)^2}$$

für alle  $x \in (0, 1]$  stets positiv oder, im Fall  $p = q = \frac{1}{2}$ , konstant Null ist.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d ET(\Gamma_{\text{LoT}}(x))}{d x} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow pqx(x+2)(4(p+q-2pq)(p+q-2pq-1)+1) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (p+q-2pq)(p+q-2pq-1) &\geq -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist erfüllt, da  $(p+q-2pq) \in (0, 1)$  (nach Lemma 3.1.8 auf S. 32) und die Funktion  $f(z) = z(z-1)$  auf  $(0, 1)$  ihr Minimum im Punkt  $(z, f(z)) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$  annimmt.

$$\boxed{2. \Gamma_{\text{BiT}}(x), \Gamma_{\text{BiB}}(x).}$$

Es gilt die Gleichheit:  $ET(\Gamma_{\text{BiT}}(x)) = ET(\Gamma_{\text{BiB}}(x))$ . Außerdem ist  $ET(\Gamma_{\text{BiT}}(x))$  stetig differenzierbar auf  $[0, 1]$ . Wir beweisen, dass die erste Ableitung

$$\frac{d ET(\Gamma_{\text{BiT}}(x))}{d x} = \frac{32pqx(2p+2q-4pq-1)^2}{(x(2p+2q-4pq-1)+2)^2(x(2p+2q-4pq-1)+2)^2}$$

für alle  $x \in (0, 1]$  stets positiv oder, im Fall  $p = q = \frac{1}{2}$ , konstant Null ist.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d ET(\Gamma_{\text{BiT}}(x))}{d x} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 32pqx(2p+2q-4pq-1)^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (2(p+q-2pq)-1)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist offensichtlich erfüllt.

Wir bemerken, dass nur für den Fall  $p = q = \frac{1}{2}$  der Erwartete Transfer in den Bimatrixsituationen der vier Szenarien  $(\Gamma_{\text{LoT}}(x), \Gamma_{\text{WiB}}(x), \Gamma_{\text{BiT}}(x), \Gamma_{\text{BiB}}(x))$  konstant ist und mit dem Erwarteten Transfer des Ausgangsspiels übereinstimmt. Das Spiel 4 (Matching Pennies, S. 31) nimmt eine Sonderstellung ein. Der Erwartete Transfer beträgt für dieses Spiel stets 1.



**A.1.3. Tabelle für Gegenbeispiel (zu S. 43)**

Szenario	$A$	$B$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{v}_1$	$\bar{v}_2$	$ET$
Matrix- spiel: $\Gamma$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$	$-1$	$1$	$\frac{4}{3}$
Winner Tax : $\Gamma_{WiT}(0.1)$	$\begin{pmatrix} 0.9 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 1.8 \\ 2.7 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{27}{55} \\ \frac{28}{55} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{20}{59} \\ \frac{39}{59} \end{pmatrix}$	$-\frac{60}{59}$ $\approx -1.0169$	$\frac{243}{275}$ $\approx 0.8836$	$\frac{4}{3} - \frac{2}{9735}$
Loser Bonus: $\Gamma_{LoB}(0.1)$	$\begin{pmatrix} 1 & -1.8 \\ -2.7 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.9 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{30}{59} \\ \frac{29}{59} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{18}{55} \\ \frac{37}{55} \end{pmatrix}$	$-\frac{243}{275}$ $\approx -0.8836$	$\frac{60}{59}$ $\approx 1.0169$	$\frac{4}{3} - \frac{2}{9735}$
Loser Tax: $\Gamma_{LoT}(0.1)$	$\begin{pmatrix} 1 & -2.2 \\ -3.3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{30}{61} \\ \frac{31}{61} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{22}{65} \\ \frac{43}{65} \end{pmatrix}$	$-\frac{363}{325}$ $\approx -1.1169$	$\frac{60}{61}$ $\approx 0.9836$	$\frac{4}{3} - \frac{2}{11895}$
Winner Bonus: $\Gamma_{WiB}(0.1)$	$\begin{pmatrix} 1.1 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2.2 \\ 3.3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{33}{65} \\ \frac{32}{65} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{20}{61} \\ \frac{41}{61} \end{pmatrix}$	$-\frac{60}{61}$ $\approx -0.9836$	$\frac{363}{325}$ $\approx 1.1169$	$\frac{4}{3} - \frac{2}{11895}$
Bilateral Tax: $\Gamma_{BiT}(0.1)$	$\begin{pmatrix} 0.95 & -2.1 \\ -3.15 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.05 & 1.9 \\ 2.85 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{57}{116} \\ \frac{59}{116} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{21}{62} \\ \frac{41}{62} \end{pmatrix}$	$-\frac{1323}{1240}$ $\approx -1.0669$	$\frac{1083}{1160}$ $\approx 0.9336$	$\frac{4}{3} - \frac{2}{10788}$
Bilateral Bonus: $\Gamma_{BiB}(0.1)$	$\begin{pmatrix} 1.05 & -1.9 \\ -2.85 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.95 & 2.1 \\ 3.15 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{63}{124} \\ \frac{61}{124} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{19}{58} \\ \frac{39}{58} \end{pmatrix}$	$-\frac{1083}{1160}$ $\approx -0.9336$	$\frac{1323}{1240}$ $\approx 1.0669$	$\frac{4}{3} - \frac{2}{10788}$

Tabelle A.4.: Ergebnisse für Spiel 5 (S. 43) mit Steuer- bzw. Bonussatz  $x = 0.1$

### A.1.4. Experimentelle Ergebnisse (zu S. 44)

Mit Hilfe der Verwerfungsmethode wurden  $10^5$  zufällige  $2 \times 2$  - Matrixspiele  $\Gamma = (A, -A)$  (jeder Eintrag der Matrix  $A$  unabhängig, standardnormalverteilt) mit eindeutigem Gleichgewicht erzeugt.

Trägmächtigkeit	1	2	1 oder 2
Anzahl der zufällig erzeugten Spiele $\Gamma$	66841	33159	100000
davon Spiele mit $ET(\Gamma) = 0$	0	0	0

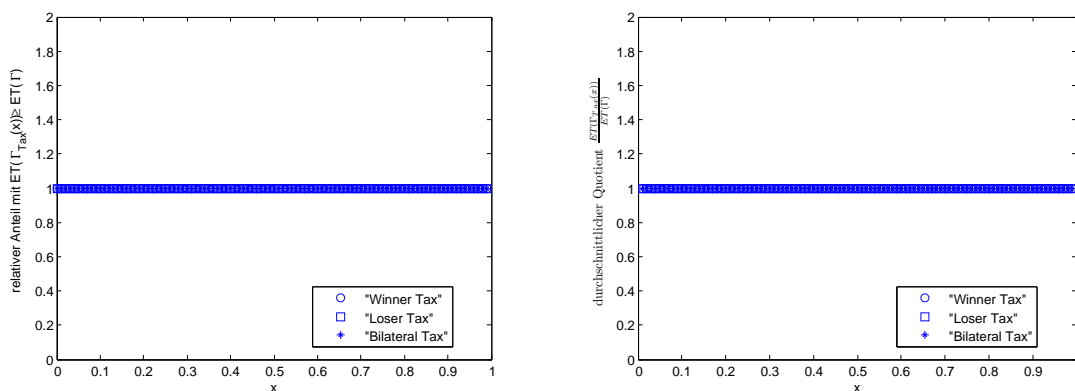


Abbildung A.1.: Ergebnisse des Experiments (S. 44) für zufällige  $2 \times 2$  - Spiele: nur Instanzen mit  $|\text{supp}(\bar{p})| = |\text{supp}(\bar{q})| = 1$

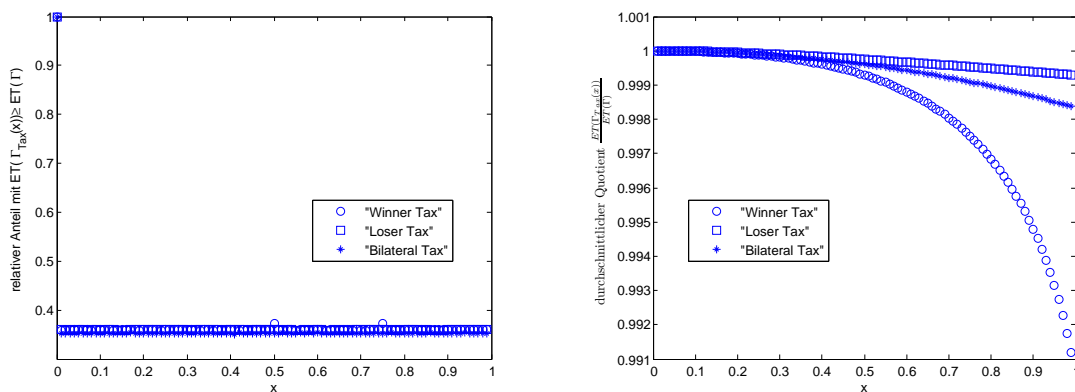


Abbildung A.2.: Ergebnisse des Experiments (S. 44) für zufällige  $2 \times 2$  - Spiele: nur Instanzen mit  $|\text{supp}(\bar{p})| = |\text{supp}(\bar{q})| = 2$

## A.2. Anlagen zu Abschnitt 3.2 (ab S. 46)

### A.2.1. Ergebnistabellen für nicht-degenerierte, symmetrische $3 \times 3$ - Matrixspiele mit gemischtem Gleichgewicht (zu S. 54)

Spiel	A	B
$\Gamma$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -a \\ -1 & 0 & b \\ a & -b & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & a \\ 1 & 0 & -b \\ -a & b & 0 \end{pmatrix}$
$\Gamma_{\text{WiT}}(x)$	$\begin{pmatrix} 0 & (1-x) & -a \\ -1 & 0 & (1-x)b \\ (1-x)a & -b & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & (1-x)a \\ (1-x) & 0 & -b \\ -a & (1-x)b & 0 \end{pmatrix}$
$\Gamma_{\text{LoB}}(x)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -(1-x)a \\ -(1-x) & 0 & b \\ a & -(1-x)b & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -(1-x) & a \\ 1 & 0 & -(1-x)b \\ -(1-x)a & b & 0 \end{pmatrix}$
$\Gamma_{\text{LoT}}(x)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -(1+x)a \\ -(1+x) & 0 & b \\ a & -(1+x)b & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -(1+x) & a \\ 1 & 0 & -(1+x)b \\ -(1+x)a & b & 0 \end{pmatrix}$
$\Gamma_{\text{WiB}}(x)$	$\begin{pmatrix} 0 & (1+x) & -a \\ -1 & 0 & (1+x)b \\ (1+x)a & -b & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & (1+x)a \\ (1+x) & 0 & -b \\ -a & (1+x)b & 0 \end{pmatrix}$
$\Gamma_{\text{BiT}}(x)$	$\begin{pmatrix} 0 & (1-\frac{1}{2}x) & -(1+\frac{1}{2}x)a \\ -(1+\frac{1}{2}x) & 0 & (1-\frac{1}{2}x)b \\ (1-\frac{1}{2}x)a & -(1+\frac{1}{2}x)b & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -(1+\frac{1}{2}x) & (1-\frac{1}{2}x)a \\ (1-\frac{1}{2}x) & 0 & -(1+\frac{1}{2}x)b \\ -(1+\frac{1}{2}x)a & (1-\frac{1}{2}x)b & 0 \end{pmatrix}$
$\Gamma_{\text{BiB}}(x)$	$\begin{pmatrix} 0 & (1+\frac{1}{2}x) & -(1-\frac{1}{2}x)a \\ -(1-\frac{1}{2}x) & 0 & (1+\frac{1}{2}x)b \\ (1+\frac{1}{2}x)a & -(1-\frac{1}{2}x)b & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -(1-\frac{1}{2}x) & (1+\frac{1}{2}x)a \\ (1+\frac{1}{2}x) & 0 & -(1-\frac{1}{2}x)b \\ -(1-\frac{1}{2}x)a & (1+\frac{1}{2}x)b & 0 \end{pmatrix}$

Tabelle A.5.: Auszahlungsmatrizen für symmetrische, nicht-degenerierte  $3 \times 3$  - Spiele mit gemischtem Gleichgewicht und alle sechs Szenarien

Spiel	$\bar{p} = \bar{q}$	$\bar{v}_1 = \bar{v}_2$
$\Gamma$	$\begin{pmatrix} \frac{b}{a+b+1} \\ \frac{a}{a+b+1} \\ \frac{1}{a+b+1} \end{pmatrix}$	0
$\Gamma_{\text{WiT}}(x)$	$\begin{pmatrix} \frac{b(x^2-2x+1)+b(a+b-bx)}{(x^2-2x+2)(a+b+ab)+(1-x)(a^2+b^2+1)} \\ \frac{ab(x^2-2x+1)+a(a-ax+1)}{(x^2-2x+2)(a+b+ab)+(1-x)(a^2+b^2+1)} \\ \frac{a(x^2-2x+1)+b-x+1}{(x^2-2x+2)(a+b+ab)+(1-x)(a^2+b^2+1)} \end{pmatrix}$	$-\frac{abx(x^2-3x+3)}{(1-x)(a^2+b^2+1)+(x^2-2x+2)(a+b+ab)}$
$\Gamma_{\text{LoB}}(x)$	$\begin{pmatrix} \frac{ab(x^2-2x+1)+b(b-bx+1)}{(x^2-2x+2)(a+b+ab)+(1-x)(a^2+b^2+1)} \\ \frac{a(x^2-2x+1)+a(a+b-ax)}{(x^2-2x+2)(a+b+ab)+(1-x)(a^2+b^2+1)} \\ \frac{b(x^2-2x+1)+a-x+1}{(x^2-2x+2)(a+b+ab)+(1-x)(a^2+b^2+1)} \end{pmatrix}$	$\frac{abx(x^2-3x+3)}{(1-x)(a^2+b^2+1)+(x^2-2x+2)(a+b+ab)}$
$\Gamma_{\text{LoT}}(x)$	$\begin{pmatrix} \frac{ab(x^2+2x+1)+b(b+bx+1)}{(x^2+2x+2)(a+b+ab)+(1+x)(a^2+b^2+1)} \\ \frac{a(x^2+2x+1)+a(a+b+ax)}{(x^2+2x+2)(a+b+ab)+(1+x)(a^2+b^2+1)} \\ \frac{b(x^2+2x+1)+a+x+1}{(x^2+2x+2)(a+b+ab)+(1+x)(a^2+b^2+1)} \end{pmatrix}$	$-\frac{abx(x^2+3x+3)}{(1+x)(a^2+b^2+1)+(x^2+2x+2)(a+b+ab)}$
$\Gamma_{\text{WiB}}(x)$	$\begin{pmatrix} \frac{b(x^2+2x+1)+b(a+b+bx)}{(x^2+2x+2)(a+b+ab)+(1+x)(a^2+b^2+1)} \\ \frac{ab(x^2+2x+1)+a(a+ax+1)}{(x^2+2x+2)(a+b+ab)+(1+x)(a^2+b^2+1)} \\ \frac{a(x^2+2x+1)+b+x+1}{(x^2+2x+2)(a+b+ab)+(1+x)(a^2+b^2+1)} \end{pmatrix}$	$\frac{abx(x^2+3x+3)}{(1+x)(a^2+b^2+1)+(x^2+2x+2)(a+b+ab)}$
$\Gamma_{\text{BiT}}(x)$	$\begin{pmatrix} \frac{b((x-2)^2+b(4-x^2))+ab(x+2)^2}{(4-x^2)(a^2+b^2+1)+2(4+x^2)(a+b+ab)} \\ \frac{a((x+2)^2+a(4-x^2))+ab(x-2)^2}{(4-x^2)(a^2+b^2+1)+2(4+x^2)(a+b+ab)} \\ \frac{a(x-2)^2+b(x+2)^2+4-x^2}{(4-x^2)(a^2+b^2+1)+2(4+x^2)(a+b+ab)} \end{pmatrix}$	$-\frac{abx(x^2+12)}{(4-x^2)(a^2+b^2+1)+2(4+x^2)(a+b+ab)}$
$\Gamma_{\text{BiB}}(x)$	$\begin{pmatrix} \frac{b((x+2)^2+b(4-x^2))+ab(x-2)^2}{(4-x^2)(a^2+b^2+1)+2(4+x^2)(a+b+ab)} \\ \frac{a((x-2)^2+a(4-x^2))+ab(x+2)^2}{(4-x^2)(a^2+b^2+1)+2(4+x^2)(a+b+ab)} \\ \frac{a(x+2)^2+b(x-2)^2+4-x^2}{(4-x^2)(a^2+b^2+1)+2(4+x^2)(a+b+ab)} \end{pmatrix}$	$\frac{abx(x^2+12)}{(4-x^2)(a^2+b^2+1)+2(4+x^2)(a+b+ab)}$

Tabelle A.6.: Gleichgewichts-Strategien und erwartete Auszahlung für symmetrische, nicht-degenerierte  $3 \times 3$  - Spiele mit gemischtem Gleichgewicht und alle sechs Szenarien

Spiel	$ET(x)$	$\frac{d ET(x)}{dx}$	$\frac{ET(x)}{ET(0)}$
$\Gamma_{\text{WiT}}(x), \Gamma_{\text{LoB}}(x)$	$\frac{2ab(x^2-3x+3)}{(x^2-2x+2)(a+b+ab)+(1-x)(a^2+b^2+1)}$	$\frac{2abx(x-2)(-a^2-b^2+a+b+ab-1)}{((x^2-2x+2)(a+b+ab)+(1-x)(a^2+b^2+1))^2}$	$\frac{(a+b+1)^2(x^2-3x+3)}{3((1-x)(a^2+b^2+1)+(x^2-2x+2)(a+b+ab))}$
$\Gamma_{\text{LoT}}(x), \Gamma_{\text{WiB}}(x)$	$\frac{2ab(x^2+3x+3)}{(x^2+2x+2)(a+b+ab)+(1+x)(a^2+b^2+1)}$	$\frac{-2abx(x+2)(-a^2-b^2+a+b+ab-1)}{((x^2+2x+2)(a+b+ab)+(1+x)(a^2+b^2+1))^2}$	$\frac{(a+b+1)^2(x^2+3x+3)}{3((1+x)(a^2+b^2+1)+(x^2+2x+2)(a+b+ab))}$
$\Gamma_{\text{BiT}}(x), \Gamma_{\text{BiB}}(x)$	$\frac{2ab(x^2+12)}{(4-x^2)(a^2+b^2+1)+2(4+x^2)(a+b+ab)}$	$\frac{64abx(a^2+b^2-a-b-ab+1)}{((4-x^2)(a^2+b^2+1)+2(4+x^2)(a+b+ab))^2}$	$\frac{(a+b+1)^2(x^2+12)}{3((4-x^2)(a^2+b^2+1)+2(4+x^2)(a+b+ab))}$

Tabelle A.7.: Erwarteter Transfer für symmetrische, nicht-degenerierte  $3 \times 3$  - Spiele mit gemischtem Gleichgewicht und alle sechs Szenarien

## A.2.2. Monotonie-Beweise für $3 \times 3$ - Matrixspiele (S. 55)

Wir zeigen Aussage (iii) des Theorems 3.2.2 bzw. Aussage (ii) des Theorems 3.2.1 (S. 49) für:

$$\boxed{1. \Gamma_{\text{LoT}}(x), \Gamma_{\text{WiB}}(x).}$$

Es gilt die Gleichheit:  $ET(\Gamma_{\text{LoT}}(x)) = ET(\Gamma_{\text{WiB}}(x))$ . Außerdem ist  $ET(\Gamma_{\text{LoT}}(x))$  stetig differenzierbar auf  $[0, 1)$ . Wir beweisen, dass die erste Ableitung

$$\frac{d ET(\Gamma_{\text{LoT}}(x))}{d x} = \frac{-2abx(x+2)(-a^2 - b^2 + a + b + ab - 1)}{((x^2 + 2x + 2)(a + b + ab) + (1 + x)(a^2 + b^2 + 1))^2}$$

für alle  $x \in (0, 1)$  stets positiv oder, im Fall  $a = b = 1$ , konstant Null ist.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d ET(\Gamma_{\text{LoT}}(x))}{d x} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow -2abx(x+2)(-a^2 - b^2 + a + b + ab - 1) &\geq 0. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist erfüllt, da  $f(a, b) = (-a^2 - b^2 + a + b + ab - 1) \leq 0$  (nach Lemma 3.2.3 auf S. 50) und  $-2abx(x+2) < 0$ .

$$\boxed{2. \Gamma_{\text{BiT}}(x), \Gamma_{\text{BiB}}(x).}$$

Es gilt die Gleichheit:  $ET(\Gamma_{\text{BiT}}(x)) = ET(\Gamma_{\text{BiB}}(x))$ . Außerdem ist  $ET(\Gamma_{\text{BiT}}(x))$  stetig differenzierbar auf  $[0, 1)$ . Wir beweisen, dass die erste Ableitung

$$\frac{d ET(\Gamma_{\text{BiT}}(x))}{d x} = \frac{64abx(a^2 + b^2 - a - b - ab + 1)}{((4 - x^2)(a^2 + b^2 + 1) + 2(4 + x^2)(a + b + ab))^2}$$

für alle  $x \in (0, 1)$  stets positiv oder, im Fall  $a = b = 1$ , konstant Null ist.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d ET(\Gamma_{\text{BiT}}(x))}{d x} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow -64abx(-a^2 - b^2 + a + b + ab - 1) &\geq 0. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist erfüllt, da  $f(a, b) = (-a^2 - b^2 + a + b + ab - 1) \leq 0$  (nach Lemma 3.2.3 auf S. 50) und  $-64abx < 0$ .

Wir bemerken, dass nur für den Fall  $a = b = 1$  der Erwartete Transfer in den Bimatrixsituationen der vier Szenarien  $(\Gamma_{\text{LoT}}(x), \Gamma_{\text{WiB}}(x), \Gamma_{\text{BiT}}(x), \Gamma_{\text{BiB}}(x))$  konstant ist und mit dem Erwarteten Transfer des Ausgangsspiels übereinstimmt. Das Spiel 1 (Stein-Schere-Papier, S. 9) nimmt eine Sonderstellung ein. Der Erwartete Transfer beträgt für dieses Spiel stets  $\frac{2}{3}$ .

### A.2.3. Tabelle für Gegenbeispiel (zu S. 58)

Wegen der großen Nenner ist der Erwartete Transfer nicht als rationaler Bruch, sondern als gerundete Dezimalzahl angegeben.

Szenario	$A$	$B$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{v}_1$	$\bar{v}_2$	$ET$
Matrixspiel: $\Gamma$	$\begin{pmatrix} 18 & -6 & -4 \\ -13 & 4 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -18 & 6 & 4 \\ 13 & -4 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$	0	0	$\frac{24}{5}$ = 4.8
Winner Tax: $\Gamma_{WIT}(0.1)$	$\begin{pmatrix} 16.2 & -6 & -4 \\ -13 & 3.6 & 2.7 \\ -5 & 1.8 & 0.9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -18 & 5.4 & 3.6 \\ 11.7 & -4 & -3 \\ 4.5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 55 \\ 271 \\ 0 \\ 216 \\ 271 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 49 \\ 261 \\ 0 \\ 212 \\ 261 \end{pmatrix}$	$-\frac{271}{1305}$ $\approx -0.207663$	$-\frac{18}{271}$ $\approx -0.066421$	$\approx 2.740838$
Loser Bonus: $\Gamma_{LoB}(0.1)$	$\begin{pmatrix} 18 & -5.4 & -3.6 \\ -11.7 & 4 & 3 \\ -4.5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -16.2 & 6 & 4 \\ 13 & -3.6 & -2.7 \\ 5 & -1.8 & -0.9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 441 \\ 1421 \\ 319 \\ 1421 \\ 661 \\ 1421 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 140 \\ 644 \\ 297 \\ 644 \\ 207 \\ 644 \end{pmatrix}$	$\frac{171}{644}$ $\approx 0.265528$	$\frac{1539}{7105}$ $\approx 0.216608$	$\approx 4.821359$
Loser Tax: $\Gamma_{LoT}(0.1)$	$\begin{pmatrix} 18 & -6.6 & -4.4 \\ -14.3 & 4 & 3 \\ -5.5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -19.8 & 6 & 4 \\ 13 & -4.4 & -3.3 \\ 5 & -2.2 & -1.1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 61 \\ 299 \\ 0 \\ 238 \\ 299 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 54 \\ 289 \\ 0 \\ 235 \\ 289 \end{pmatrix}$	$-\frac{62}{289}$ $\approx -0.214533$	$-\frac{89}{1495}$ $\approx -0.059532$	$\approx 2.740648$
Winner Bonus: $\Gamma_{WiB}(0.1)$	$\begin{pmatrix} 19.8 & -6 & -4 \\ -13 & 4.4 & 3.3 \\ -5 & 2.2 & 1.1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -18 & 6.6 & 4.4 \\ 14.3 & -4 & -3 \\ 5.5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 20 \\ 64 \\ 15 \\ 64 \\ 29 \\ 64 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 341 \\ 1581 \\ 688 \\ 1581 \\ 552 \\ 1581 \end{pmatrix}$	$\frac{693}{2635}$ $\approx 0.218750$	$\frac{7}{32}$ $\approx 0.207663$	$\approx 4.817481$
Bilateral Tax: $\Gamma_{BIT}(0.1)$	$\begin{pmatrix} 17.1 & -6.3 & -4.2 \\ -13.65 & 3.8 & 2.85 \\ -5.25 & 1.9 & 0.95 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -18.9 & 5.7 & 3.8 \\ 12.35 & -4.2 & -3.15 \\ 4.75 & -2.1 & -1.05 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 58 \\ 285 \\ 0 \\ 227 \\ 285 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 103 \\ 550 \\ 0 \\ 447 \\ 550 \end{pmatrix}$	$-\frac{1161}{5500}$ $\approx -0.211091$	$-\frac{359}{5700}$ $\approx -0.629825$	$\approx 2.740734$
Bilateral Bonus: $\Gamma_{BiB}(0.1)$	$\begin{pmatrix} 18.9 & -5.7 & -3.8 \\ -12.35 & 4.2 & 3.15 \\ -4.75 & 2.1 & 1.05 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -17.1 & 6.3 & 4.2 \\ 13.65 & -3.8 & -2.85 \\ 5.25 & -1.9 & -0.95 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1957 \\ 6283 \\ 1443 \\ 6283 \\ 2883 \\ 6283 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1239 \\ 5723 \\ 2561 \\ 5723 \\ 1923 \\ 5723 \end{pmatrix}$	$\frac{1512}{5723}$ $\approx 0.264197$	$\frac{1368}{6283}$ $\approx 0.217730$	$\approx 4.819277$

Tabelle A.8.: Ergebnisse für Spiel 7 (S. 57) mit Steuer- bzw. Bonussatz  $x = 0.1$

### A.2.4. Experimentelle Ergebnisse (ab S. 60)

Experiment 1(b) (S. 59) für  $n = 3$  und  $N = 10^5$  (zu S. 60).

Ergebnisse getrennt nach der Trägermächtigkeit der Gleichgewichts-Strategien im Ausgangsspiel.

Trägermächtigkeit	1	2	3	1, 2 oder 3
Anzahl der zufällig erzeugten Spiele $\Gamma$	29979	60102	9919	100000
davon Spiele mit $ET(\Gamma) = 0$	29979	0	0	29979

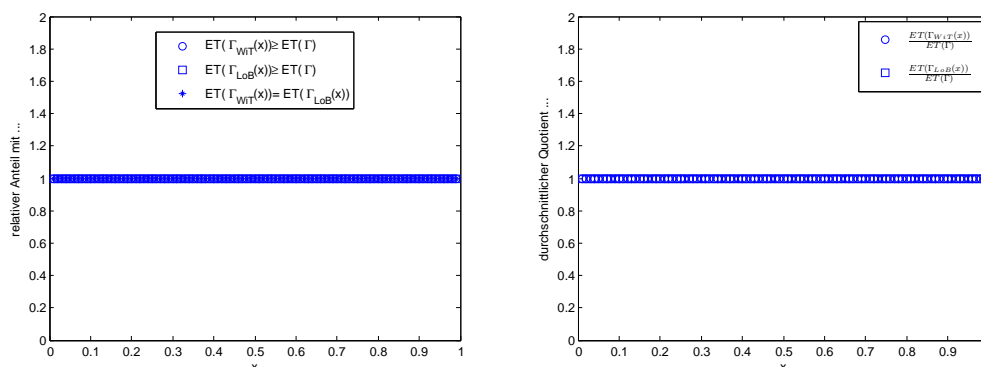


Abbildung A.3.: Ergebnisse des Experiments 1(b) für zufällige **faire**  $3 \times 3$  - Spiele: nur Instanzen mit  $|\text{supp}(\bar{p})| = |\text{supp}(\bar{q})| = 1$

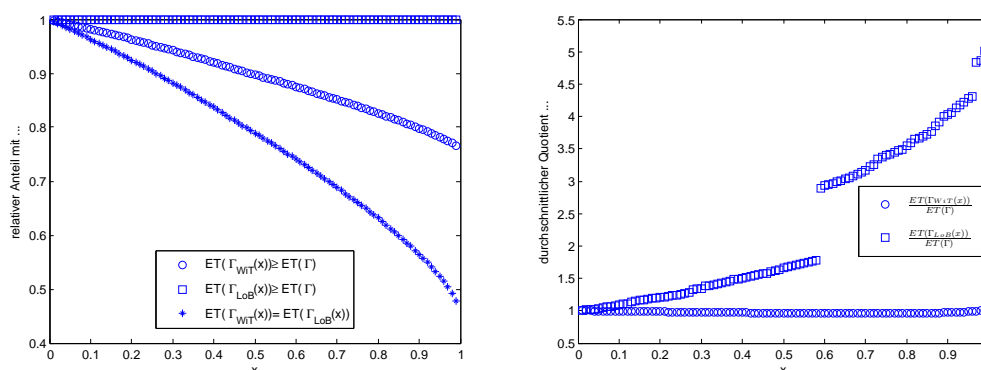


Abbildung A.4.: Ergebnisse des Experiments 1(b) für zufällige **faire**  $3 \times 3$  - Spiele: nur Instanzen mit  $|\text{supp}(\bar{p})| = |\text{supp}(\bar{q})| = 2$

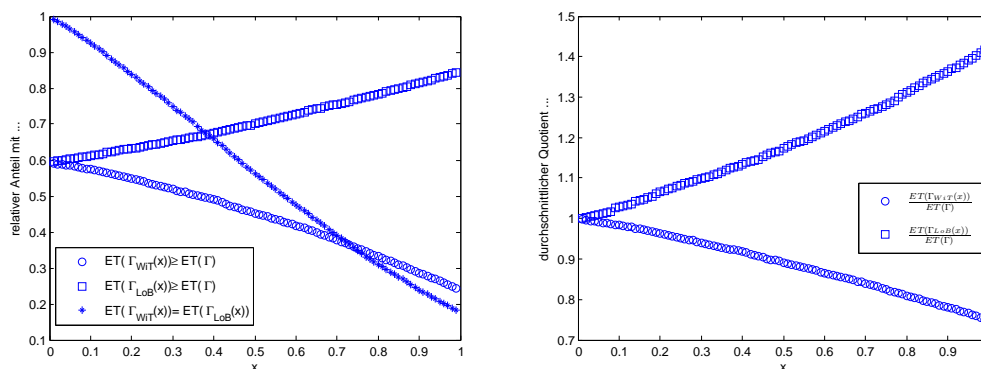


Abbildung A.5.: Ergebnisse des Experiments 1(b) für zufällige **faire**  $3 \times 3$  - Spiele: nur Instanzen mit  $|\text{supp}(\bar{p})| = |\text{supp}(\bar{q})| = 3$



Die Tabelle A.9 zeigt für festen Prozentsatz  $x \in \{0.01, 0.02, \dots, 0.99\}$  die Anzahl der zufällig erzeugten **fairen** Spiele, die im Experiment 1(b) (für  $\mathbf{n} = \mathbf{3}$  und  $\mathbf{N} = \mathbf{10}^5$ ) kein eindeutiges Gleichgewicht lieferten (getrennt nach der Trägermächtigkeit der Gleichgewichts-Strategien im Ausgangsspiel). Man findet außerdem, wie viele Spiele bei der Quotientenbildung  $\frac{ET(\Gamma_{\text{WiT}}(x))}{ET(\Gamma)}$  bzw.  $\frac{ET(\Gamma_{\text{LoB}}(x))}{ET(\Gamma)}$  gesondert behandelt wurden (siehe Beschreibung des Experiments 1 auf S. 59). Der Fall  $ET(\Gamma) = 0$  trat nur bei Ausgangsspielen mit reinem Gleichgewicht auf. Hatten die daraus entstandenen Bimatrixspiele ein eindeutiges Gleichgewicht, so betrug der Erwartete Transfer auch dort Null. Dann wurde ein Quotient von 1 angenommen. Es musste kein Spiel ausgeschlossen werden.

Im Folgenden ist:

- $\mathbf{x}$ : der Steuersatz.
- $\mathbf{U}_i$ : die Anzahl der Spiele  $\Gamma$  mit Gleichgewichts-Strategien der Trägermächtigkeit  $\mathbf{i}$ , die für  $x$  ein uneindeutiges Gleichgewicht in mindestens einem der Spiele  $\Gamma_{\text{WiT}}(x)$  oder  $\Gamma_{\text{LoB}}(x)$  hatten.
- $\mathbf{U}_{\text{ges}}$ : die Anzahl aller Spiele  $\Gamma$ , die für  $x$  ein uneindeutiges Gleichgewicht in mindestens einem der Spiele  $\Gamma_{\text{WiT}}(x)$  oder  $\Gamma_{\text{LoB}}(x)$  hatten.
- $\mathbf{Q}_{\text{WiT}}$ : die Anzahl aller Spiele  $\Gamma$  mit  $ET(\Gamma = 0)$ , die für  $x$  ein eindeutiges Gleichgewicht hatten (für  $\Gamma_{\text{WiT}}(x)$  und  $\Gamma_{\text{LoB}}(x)$ ) und  $ET(\Gamma_{\text{WiT}}(x)) = 0$  erfüllten. Für diese Spiele wurde ein Quotient von 1 angenommen:  $\frac{ET(\Gamma_{\text{WiT}}(x))}{ET(\Gamma)} = 1$ .
- $\mathbf{Q}_{\text{LoB}}$ : die Anzahl aller Spiele  $\Gamma$  mit  $ET(\Gamma = 0)$ , die für  $x$  ein eindeutiges Gleichgewicht hatten (für  $\Gamma_{\text{WiT}}(x)$  und  $\Gamma_{\text{LoB}}(x)$ ) und  $ET(\Gamma_{\text{LoB}}(x)) = 0$  erfüllten. Für diese Spiele wurde ein Quotient von 1 angenommen:  $\frac{ET(\Gamma_{\text{LoB}}(x))}{ET(\Gamma)} = 1$ .

$x$	$U_1$	$U_2$	$U_3$	$U_{\text{ges}}$	$Q_{\text{WiT}}$	$Q_{\text{LoB}}$
0.01	0	0	0	0	29979	29979
0.02	0	0	0	0	29979	29979
0.03	0	0	0	0	29979	29979
0.04	0	0	0	0	29979	29979
0.05	0	0	0	0	29979	29979
0.06	0	0	0	0	29979	29979
0.07	0	0	0	0	29979	29979
0.08	0	0	0	0	29979	29979
0.09	0	0	0	0	29979	29979
0.1	0	0	0	0	29979	29979
0.11	0	0	0	0	29979	29979
0.12	0	1	0	1	29979	29979
0.13	0	1	0	1	29979	29979
0.14	0	1	0	1	29979	29979
0.15	0	1	0	1	29979	29979
0.16	0	1	0	1	29979	29979
0.17	0	1	0	1	29979	29979
0.18	0	1	0	1	29979	29979
0.19	0	1	0	1	29979	29979
0.2	0	1	0	1	29979	29979
0.21	0	1	0	1	29979	29979
0.22	0	2	0	2	29979	29979
0.23	0	2	0	2	29979	29979
0.24	0	2	0	2	29979	29979
0.25	0	4	0	4	29979	29979
0.26	0	4	0	4	29979	29979
0.27	0	6	0	6	29979	29979
0.28	0	6	0	6	29979	29979
0.29	0	6	0	6	29979	29979
0.3	0	5	0	5	29979	29979
0.31	0	6	0	6	29979	29979
0.32	0	8	0	8	29979	29979
0.33	0	9	0	9	29979	29979
0.34	0	10	0	10	29979	29979
0.35	0	9	0	9	29979	29979
0.36	0	9	0	9	29979	29979
0.37	0	9	0	9	29979	29979
0.38	0	8	0	8	29979	29979
0.39	0	11	0	11	29979	29979
0.4	0	11	0	11	29979	29979
0.41	0	11	0	11	29979	29979
0.42	0	12	0	12	29979	29979
0.43	0	12	0	12	29979	29979
0.44	0	13	0	13	29979	29979
0.45	0	13	0	13	29979	29979
0.46	0	14	0	14	29979	29979
0.47	0	15	0	15	29979	29979
0.48	0	19	0	19	29979	29979
0.49	1	19	0	20	29978	29978
0.5	1	22	0	23	29978	29978
0.51	1	24	0	25	29978	29978
0.52	1	25	0	26	29978	29978
0.53	1	24	0	25	29978	29978
0.54	1	21	0	22	29978	29978
0.55	1	20	0	21	29978	29978
0.56	2	23	0	25	29977	29977
0.57	3	26	0	29	29976	29976
0.58	3	30	0	33	29976	29976
0.59	3	31	0	34	29976	29976
0.6	4	34	0	38	29975	29975
0.61	4	34	0	38	29975	29975
0.62	6	34	0	40	29973	29973
0.63	6	38	0	44	29973	29973
0.64	7	41	0	48	29972	29972
0.65	7	42	0	49	29972	29972
0.66	8	47	0	55	29971	29971
0.67	8	45	0	53	29971	29971
0.68	8	45	0	53	29971	29971
0.69	8	48	0	56	29971	29971
0.7	10	48	0	58	29969	29969
0.71	11	45	0	56	29968	29968
0.72	11	50	0	61	29968	29968
0.73	11	52	0	63	29968	29968
0.74	11	52	0	63	29968	29968
0.75	11	54	0	65	29968	29968
0.76	13	59	0	72	29966	29966
0.77	15	63	0	78	29964	29964
0.78	16	66	0	82	29963	29963
0.79	17	67	0	84	29962	29962
0.8	17	73	0	90	29962	29962
0.81	18	73	0	91	29961	29961
0.82	19	80	0	99	29960	29960
0.83	21	82	0	103	29958	29958
0.84	23	80	0	103	29956	29956
0.85	26	77	0	103	29953	29953
0.86	30	76	0	106	29949	29949
0.87	32	86	0	118	29947	29947
0.88	33	93	0	126	29946	29946
0.89	34	94	0	128	29945	29945
0.9	37	94	0	131	29942	29942
0.91	39	94	0	133	29940	29940
0.92	41	95	0	136	29938	29938
0.93	44	93	0	137	29935	29935
0.94	48	96	0	144	29931	29931
0.95	53	96	0	149	29926	29926
0.96	56	94	0	150	29923	29923
0.97	59	95	0	154	29920	29920
0.98	65	97	0	162	29914	29914
0.99	66	93	0	159	29913	29913

Tabelle A.9.: Sonderfälle im Experiment 1(b) für  $n = 3$  und  $N = 10^5$

**Experiment 1(c) (S. 59) für  $n = 3$  und  $N = 10^5$  (zu S. 61).**

Ergebnisse getrennt nach der Trägermächtigkeit der Gleichgewichts-Strategien im Ausgangsspiel.

Trägermächtigkeit	1	2	3	1, 2 oder 3
Anzahl der zufällig erzeugten Spiele $\Gamma$	29967	60113	9920	100000
davon Spiele mit $ET(\Gamma) = 0$	0	0	0	0

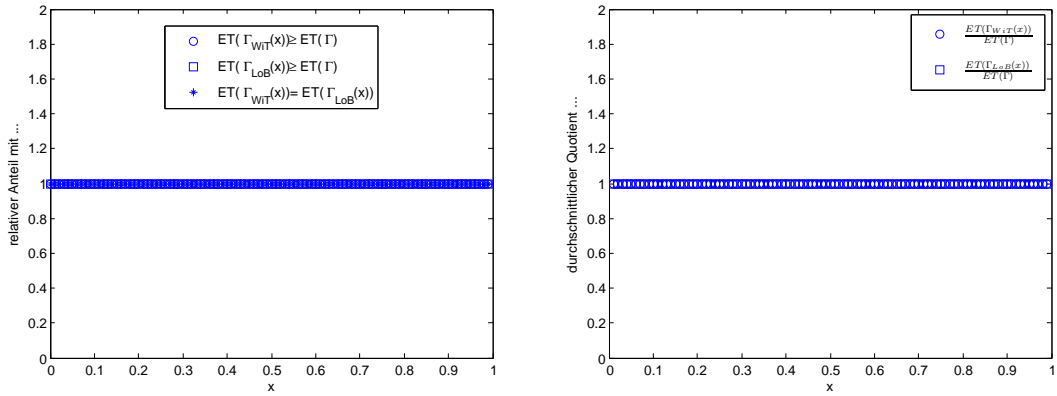


Abbildung A.6.: Ergebnisse des Experiments 1(c) für **zufällige**  $3 \times 3$  - Spiele: nur Instanzen mit  $|\text{supp}(\bar{p})| = |\text{supp}(\bar{q})| = 1$

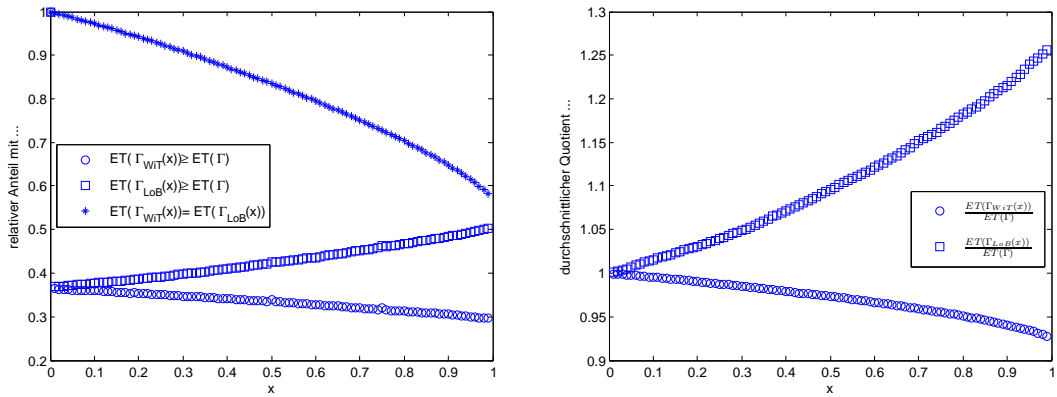


Abbildung A.7.: Ergebnisse des Experiments 1(c) für **zufällige**  $3 \times 3$  - Spiele: nur Instanzen mit  $|\text{supp}(\bar{p})| = |\text{supp}(\bar{q})| = 2$

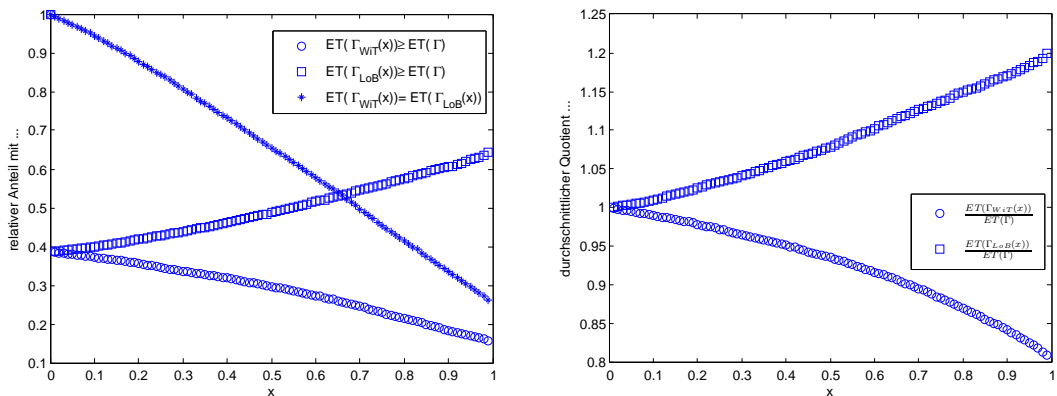


Abbildung A.8.: Ergebnisse des Experiments 1(c) für **zufällige**  $3 \times 3$  - Spiele: nur Instanzen mit  $|\text{supp}(\bar{p})| = |\text{supp}(\bar{q})| = 3$

Die Tabelle A.10 zeigt für festen Prozentsatz  $x \in \{0.01, 0.02, \dots, 0.99\}$  die Anzahl der **zufällig** erzeugten Spiele, die im Experiment 1(c) (für  $\mathbf{n} = \mathbf{3}$  und  $\mathbf{N} = \mathbf{10}^5$ ) kein eindeutiges Gleichgewicht lieferten (getrennt nach der Trägermächtigkeit der Gleichgewichts-Strategien im Ausgangsspiel). Es gab keine Spiele, die bei der Quotientenbildung  $\frac{ET(\Gamma_{\text{WiT}}(x))}{ET(\Gamma)}$  bzw.  $\frac{ET(\Gamma_{\text{LoB}}(x))}{ET(\Gamma)}$  gesondert behandelt wurden (siehe Beschreibung des Experiments 1 auf S. 59). In keinem Ausgangsspiel trat der Fall  $ET(\Gamma) = 0$  auf.

Im Folgenden ist:

- $\mathbf{x}$ : der Steuersatz.
- $\mathbf{U}_i$ : die Anzahl der Spiele  $\Gamma$  mit Gleichgewichts-Strategien der Trägermächtigkeit  $\mathbf{i}$ , die für  $x$  ein uneindeutiges Gleichgewicht in mindestens einem der Spiele  $\Gamma_{\text{WiT}}(x)$  oder  $\Gamma_{\text{LoB}}(x)$  hatten.
- $\mathbf{U}_{\text{ges}}$ : die Anzahl aller Spiele  $\Gamma$ , die für  $x$  ein uneindeutiges Gleichgewicht in mindestens einem der Spiele  $\Gamma_{\text{WiT}}(x)$  oder  $\Gamma_{\text{LoB}}(x)$  hatten.

$x$	$U_1$	$U_2$	$U_3$	$U_{\text{ges}}$
0.01	0	0	0	0
0.02	0	0	0	0
0.03	0	0	0	0
0.04	0	0	0	0
0.05	0	0	0	0
0.06	0	0	0	0
0.07	0	0	0	0
0.08	0	0	0	0
0.09	0	0	0	0
0.1	0	0	0	0
0.11	0	0	0	0
0.12	0	0	0	0
0.13	0	0	0	0
0.14	0	1	0	1
0.15	0	1	0	1
0.16	0	1	0	1
0.17	0	1	0	1
0.18	0	1	0	1
0.19	0	1	0	1
0.2	0	1	0	1
0.21	0	1	0	1
0.22	0	1	0	1
0.23	0	1	0	1
0.24	0	3	0	3
0.25	0	3	0	3
0.26	0	5	0	5
0.27	0	4	0	4
0.28	0	3	0	3
0.29	0	3	0	3
0.3	0	4	0	4
0.31	0	5	0	5
0.32	0	4	0	4
0.33	0	6	0	6
0.34	0	7	0	7
0.35	0	8	0	8
0.36	0	9	0	9
0.37	0	10	0	10
0.38	0	11	0	11
0.39	0	11	0	11
0.4	0	11	0	11
0.41	0	12	0	12
0.42	0	13	0	13
0.43	0	13	0	13
0.44	0	13	0	13
0.45	0	14	0	14
0.46	0	14	0	14
0.47	0	17	0	17
0.48	0	20	0	20
0.49	0	20	0	20
0.5	0	22	0	22

$x$	$U_1$	$U_2$	$U_3$	$U_{\text{ges}}$
0.51	0	20	0	20
0.52	0	22	0	22
0.53	0	23	0	23
0.54	0	24	0	24
0.55	0	26	0	26
0.56	1	28	0	29
0.57	2	35	0	37
0.58	2	37	0	39
0.59	2	43	0	45
0.6	2	46	0	48
0.61	2	46	0	48
0.62	2	48	0	50
0.63	2	48	0	50
0.64	2	52	0	54
0.65	3	56	0	59
0.66	4	55	0	59
0.67	4	53	0	57
0.68	4	56	0	60
0.69	4	60	0	64
0.7	4	62	0	66
0.71	5	61	0	66
0.72	7	65	0	72
0.73	9	66	0	75
0.74	9	69	0	78
0.75	9	74	0	83
0.76	10	79	0	89
0.77	10	88	0	98
0.78	11	85	0	96
0.79	12	86	0	98
0.8	13	90	0	103
0.81	13	91	0	104
0.82	13	94	0	107
0.83	13	102	0	115
0.84	13	105	0	118
0.85	14	108	0	122
0.86	16	112	0	128
0.87	20	118	0	138
0.88	20	121	0	141
0.89	22	128	0	150
0.9	24	132	0	156
0.91	26	136	0	162
0.92	28	139	0	167
0.93	29	135	0	164
0.94	29	134	0	163
0.95	31	137	0	168
0.96	31	134	0	165
0.97	34	131	0	165
0.98	35	136	0	171
0.99	35	142	0	177

Tabelle A.10.: Sonderfälle im Experiment 1(c) für  $n = 3$  und  $N = 10^5$

## A.3. Anlagen zu Kapitel 4 (ab S. 63)

### A.3.1. Tabellen für Gegenbeispiele (zu S. 63 und S. 65)

Wegen der großen Nenner ist der Erwartete Transfer nicht als rationaler Bruch, sondern als gerundete Dezimalzahl angegeben.

Szenario	A	B	$\bar{p} = \bar{q}$	$\bar{v}_1 = \bar{v}_2$	ET
Matrixspiel: $\Gamma$	$\begin{pmatrix} 0 & 6 & -5 & 1 \\ -6 & 0 & 4 & -3 \\ 5 & -4 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -6 & 5 & -1 \\ 6 & 0 & -4 & 3 \\ -5 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 15 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$	0	3.2
Winner Tax : $\Gamma_{\text{WIT}}(0.1)$	$\begin{pmatrix} 0 & 5.4 & -5 & 0.9 \\ -6 & 0 & 3.6 & -3 \\ 4.5 & -4 & 0 & 1.8 \\ -1 & 2.7 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -6 & 4.5 & -1 \\ 5.4 & 0 & -4 & 2.7 \\ -5 & 3.6 & 0 & -2 \\ 0.9 & -3 & 1.8 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 402 \\ 1829 \\ 624 \\ 1829 \\ 803 \\ 1829 \end{pmatrix}$	$-\frac{813}{9145}$ $\approx -0.088901$	$\approx 1.778022$
Loser Bonus: $\Gamma_{\text{LoB}}(0.1)$	$\begin{pmatrix} 0 & 6 & -4.5 & 1 \\ -5.4 & 0 & 4 & -2.7 \\ 5 & -3.6 & 0 & 2 \\ -0.9 & 3 & -1.8 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -5.4 & 5 & -0.9 \\ 6 & 0 & -3.6 & 3 \\ -4.5 & 4 & 0 & -1.8 \\ 1 & -2.7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1365 \\ 5081 \\ 1670 \\ 5081 \\ 2046 \\ 5081 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\frac{813}{5081}$ $\approx 0.160008$	$\approx 3.200158$
Loser Tax: $\Gamma_{\text{LoT}}(0.1)$	$\begin{pmatrix} 0 & 6 & -5.5 & 1 \\ -6.6 & 0 & 4 & -3.3 \\ 5 & -4.4 & 0 & 2 \\ -1.1 & 3 & -2.2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -6.6 & 5 & -1.1 \\ 6 & 0 & -4.4 & 3 \\ -5.5 & 4 & 0 & -2.2 \\ 1 & -3.3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 983 \\ 4468 \\ 1521 \\ 4468 \\ 1964 \\ 4468 \end{pmatrix}$	$-\frac{993}{11170}$ $\approx -0.088899$	$\approx 1.777975$
Winner Bonus: $\Gamma_{\text{WiB}}(0.1)$	$\begin{pmatrix} 0 & 6.6 & -5 & 1.1 \\ -6 & 0 & 4.4 & -3 \\ 5.5 & -4 & 0 & 2.2 \\ -1 & 3.3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -6 & 5.5 & -1 \\ 6.6 & 0 & -4 & 3.3 \\ -5 & 4.4 & 0 & -2 \\ 1.1 & -3 & 2.2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3332 \\ 12412 \\ 4085 \\ 12412 \\ 4995 \\ 12412 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\frac{993}{6206}$ $\approx 0.160006$	$\approx 3.200129$
Bilateral Tax: $\Gamma_{\text{BiT}}(0.1)$	$\begin{pmatrix} 0 & 5.7 & -5.25 & 0.95 \\ -6.3 & 0 & 3.8 & -3.15 \\ 4.75 & -4.2 & 0 & 1.9 \\ -1.05 & 2.85 & -2.1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -6.3 & 4.75 & -1.05 \\ 5.7 & 0 & -4.2 & 2.85 \\ -5.25 & 3.8 & 0 & -2.1 \\ 0.95 & -3.15 & 1.9 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 7130 \\ 32423 \\ 11049 \\ 32423 \\ 14244 \\ 32423 \end{pmatrix}$	$-\frac{14412}{162115}$ $\approx -0.088900$	$\approx 1.777996$
Bilateral Bonus: $\Gamma_{\text{BiB}}(0.1)$	$\begin{pmatrix} 0 & 6.3 & -4.75 & 1.05 \\ -5.7 & 0 & 4.2 & -2.85 \\ 5.25 & -3.8 & 0 & 2.1 \\ -0.95 & 3.15 & -1.9 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -5.7 & 5.25 & -0.95 \\ 6.3 & 0 & -3.8 & 3.15 \\ -4.75 & 4.2 & 0 & -1.9 \\ 1.05 & -2.85 & 2.1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 24188 \\ 90071 \\ 29625 \\ 90071 \\ 36258 \\ 90071 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\frac{14412}{90071}$ $\approx 0.160007$	$\approx 3.200142$

Tabelle A.11.: Ergebnisse für Spiel 8 (S. 63) mit Steuer- bzw. Bonussatz  $x = 0.1$

Szenario	$A$	$B$	$\tilde{p} = \tilde{q}$	$\tilde{v}_1 = \tilde{v}_2$	$ET$
Matrixspiel: $\Gamma$	$\begin{pmatrix} 0 & 6 & -5 & 1 & -1 \\ -6 & 0 & 4 & -3 & 1 \\ 5 & -4 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -6 & 5 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & -4 & 3 & -1 \\ -5 & 4 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{5}{23} \\ \frac{6}{23} \\ \frac{8}{23} \\ \frac{5}{23} \\ \frac{1}{23} \end{pmatrix}$	0	$\frac{1254}{529} \approx 2.3705$
Winner Tax: $\Gamma_{WIT}(0.1)$	$\begin{pmatrix} 0 & 5.4 & -5 & 0.9 & -1 \\ -6 & 0 & 3.6 & -3 & 0.9 \\ 4.5 & -4 & 0 & 1.8 & -1 \\ -1 & 2.7 & -2 & 0 & 0.9 \\ 0.9 & -1 & 0.9 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -6 & 4.5 & -1 & 0.9 \\ 5.4 & 0 & -4 & 2.7 & -1 \\ -5 & 3.6 & 0 & -2 & 0.9 \\ 0.9 & -3 & 1.8 & 0 & -1 \\ -1 & 0.9 & -1 & 0.9 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 402 \\ 1829 \\ 624 \\ 1829 \\ 803 \\ 1829 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -813 \\ -9145 \\ \approx -0.088901 \end{pmatrix}$	$\approx 1.778022$
Loser Bonus: $\Gamma_{LoB}(0.1)$	$\begin{pmatrix} 0 & 6 & -4.5 & 1 & -0.9 \\ -5.4 & 0 & 4 & -2.7 & 1 \\ 5 & -3.6 & 0 & 2 & -0.9 \\ -0.9 & 3 & -1.8 & 0 & 1 \\ 1 & -0.9 & 1 & -0.9 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -5.4 & 5 & -0.9 & 1 \\ 6 & 0 & -3.6 & 3 & -0.9 \\ -4.5 & 4 & 0 & -1.8 & 1 \\ 1 & -2.7 & 2 & 0 & -0.9 \\ -0.9 & 1 & -0.9 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 230763 \\ 1433129 \\ 366440 \\ 1433129 \\ 474684 \\ 1433129 \\ 227931 \\ 1433129 \\ 133311 \\ 1433129 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1705131 \\ 14331290 \\ \approx 0.118979 \end{pmatrix}$	$\approx 2.379592$
Loser Tax: $\Gamma_{LoT}(0.1)$	$\begin{pmatrix} 0 & 6 & -5.5 & 1 & -1.1 \\ -6.6 & 0 & 4 & -3.3 & 1 \\ 5 & -4.4 & 0 & 2 & -1.1 \\ -1.1 & 3 & -2.2 & 0 & 1 \\ 1 & -1.1 & 1 & -1.1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -6.6 & 5 & -1.1 & 1 \\ 6 & 0 & -4.4 & 3 & -1.1 \\ -5.5 & 4 & 0 & -2.2 & 1 \\ 1 & -3.3 & 2 & 0 & -1.1 \\ -1.1 & 1 & -1.1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 983 \\ 4468 \\ 1521 \\ 4468 \\ 1964 \\ 4468 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -993 \\ -11170 \\ \approx -0.088899 \end{pmatrix}$	$\approx 1.777975$
Winner Bonus: $\Gamma_{WiB}(0.1)$	$\begin{pmatrix} 0 & 6.6 & -5 & 1.1 & -1 \\ -6 & 0 & 4.4 & -3 & 1.1 \\ 5.5 & -4 & 0 & 2.2 & -1 \\ -1 & 3.3 & -2 & 0 & 1.1 \\ 1.1 & -1 & 1.1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -6 & 5.5 & -1 & 1.1 \\ 6.6 & 0 & -4 & 3.3 & -1 \\ -5 & 4.4 & 0 & -2 & 1.1 \\ 1.1 & -3 & 2.2 & 0 & -1 \\ -1 & 1.1 & -1 & 1.1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 77995 \\ 493739 \\ 196388 \\ 493739 \\ 164246 \\ 493739 \\ 81373 \\ 493739 \\ 48737 \\ 493739 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 587041 \\ 4997590 \\ \approx 0.118897 \end{pmatrix}$	$\approx 2.377941$
Bilateral Tax: $\Gamma_{BiT}(0.1)$	$\begin{pmatrix} 0 & 5.7 & -5.25 & 0.95 & -1.05 \\ -6.3 & 0 & 3.8 & -3.15 & 0.95 \\ 4.75 & -4.2 & 0 & 1.9 & -1.05 \\ -1.05 & 2.85 & -2.1 & 0 & 0.95 \\ 0.95 & -1.05 & 0.95 & -1.05 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -6.3 & 4.75 & -1.05 & 0.95 \\ 5.7 & 0 & -4.2 & 2.85 & -1.05 \\ -5.25 & 3.8 & 0 & -2.1 & 0.95 \\ 0.95 & -3.15 & 1.9 & 0 & -1.05 \\ -1.05 & 0.95 & -1.05 & 0.95 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 7130 \\ 32423 \\ 11049 \\ 32423 \\ 14244 \\ 32423 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -14412 \\ -162115 \\ \approx 0.088900 \end{pmatrix}$	$\approx 1.777996$
Bilateral Bonus: $\Gamma_{BiB}(0.1)$	$\begin{pmatrix} 0 & 6.3 & -4.75 & 1.05 & -0.95 \\ -5.7 & 0 & 4.2 & -2.85 & 1.05 \\ 5.25 & -3.8 & 0 & 2.1 & -0.95 \\ -0.95 & 3.15 & -1.9 & 0 & 1.05 \\ 1.05 & -0.95 & 1.05 & -0.95 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -5.7 & 5.25 & -0.95 & 1.05 \\ 6.3 & 0 & -3.8 & 3.15 & -0.95 \\ -4.75 & 4.2 & 0 & -1.9 & 1.05 \\ 1.05 & -2.85 & 2.1 & 0 & -0.95 \\ -0.95 & 1.05 & -0.95 & 1.05 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 13466381 \\ 84474237 \\ 21611782 \\ 84474237 \\ 28043072 \\ 84474237 \\ 13691339 \\ 84474237 \\ 7661663 \\ 84474237 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 33489869 \\ 281580790 \\ \approx 0.118935 \end{pmatrix}$	$\approx 2.378704$

Tabelle A.12.: Ergebnisse für Spiel 9 (S. 65) mit Steuer- bzw. Bonussatz  $x = 0.1$

### A.3.2. Experimentelle Ergebnisse (ab S. 68)

**Experiment 1(a)** (S. 59) für  $n = 4$  und  $N = 5 \cdot 10^4$  (zu S. 68).

Ergebnisse getrennt nach der Trägermächtigkeit der Gleichgewichts-Strategien im Ausgangsspiel.

Trägermächtigkeit	1	2	3	4	1, 2, 3 oder 4
Anzahl der zufällig erzeugten Spiele $\Gamma$	25048	0	24952	0	50000
davon Spiele mit $ET(\Gamma) = 0$	25048	0	0	0	25048

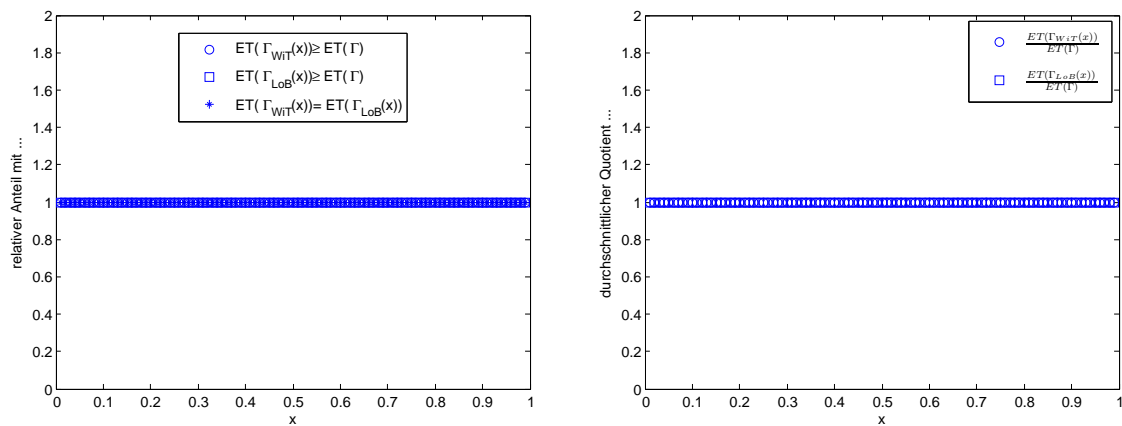


Abbildung A.9.: Ergebnisse des Experiments 1(a) für zufällige **symmetrische**  $4 \times 4$  - Spiele: nur Instanzen mit  $|\text{supp}(\bar{p})| = |\text{supp}(\bar{q})| = 1$

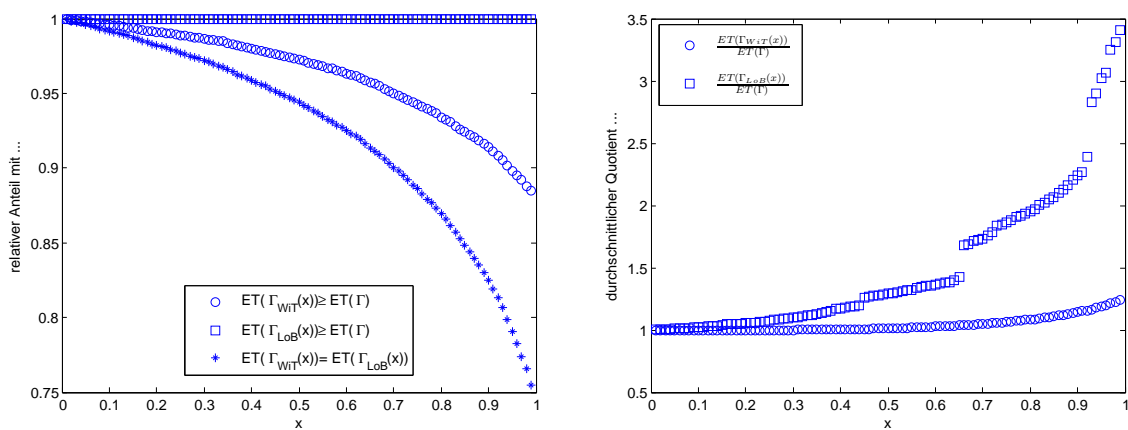


Abbildung A.10.: Ergebnisse des Experiments 1(a) für zufällige **symmetrische**  $4 \times 4$  - Spiele: nur Instanzen mit  $|\text{supp}(\bar{p})| = |\text{supp}(\bar{q})| = 3$

Die Tabelle A.13 zeigt für festen Prozentsatz  $x \in \{0.01, 0.02, \dots, 0.99\}$  die Anzahl der erzeugten **symmetrischen** Spiele, die im Experiment 1(a) (für  $n = 4$  und  $N = 5 \cdot 10^4$ ) kein eindeutiges Gleichgewicht lieferten (getrennt nach der Trägermächtigkeit der Gleichgewichts-Strategien im Ausgangsspiel). Man findet auch, wie viele Spiele bei der Quotientenbildung  $\frac{ET(\Gamma_{WiT}(x))}{ET(\Gamma)}$  bzw.  $\frac{ET(\Gamma_{LoB}(x))}{ET(\Gamma)}$  gesondert behandelt wurden (siehe Beschreibung des Experiments 1 auf S. 59). Der Fall  $ET(\Gamma) = 0$  trat nur bei Ausgangsspielen mit reinem Gleichgewicht auf. Hatten die daraus entstandenen Bimatrixspiele ein eindeutiges Gleichgewicht, so betrug der Erwartete Transfer auch dort Null. Dann wurde ein Quotient von 1 angenommen. Es musste kein Spiel ausgeschlossen werden.

Im Folgenden ist:

- $x$ : der Steuersatz.
- $U_i$ : die Anzahl der Spiele  $\Gamma$  mit Gleichgewichts-Strategien der Trägermächtigkeit  $i$ , die für  $x$  ein **uneindeutiges** Gleichgewicht in mindestens einem der Spiele  $\Gamma_{WiT}(x)$  oder  $\Gamma_{LoB}(x)$  hatten.
- $U_{ges}$ : die Anzahl aller Spiele  $\Gamma$ , die für  $x$  ein **uneindeutiges** Gleichgewicht in mindestens einem der Spiele  $\Gamma_{WiT}(x)$  oder  $\Gamma_{LoB}(x)$  hatten.
- $Q_{WiT}$ : die Anzahl aller Spiele  $\Gamma$  mit  $ET(\Gamma = 0)$ , die für  $x$  ein **eindeutiges** Gleichgewicht hatten (für  $\Gamma_{WiT}(x)$  und  $\Gamma_{LoB}(x)$ ) und  $ET(\Gamma_{WiT}(x)) = 0$  erfüllten. Für diese Spiele wurde ein **Quotient** von 1 angenommen:  $\frac{ET(\Gamma_{WiT}(x))}{ET(\Gamma)} = 1$ .
- $Q_{LoB}$ : die Anzahl aller Spiele  $\Gamma$  mit  $ET(\Gamma = 0)$ , die für  $x$  ein **eindeutiges** Gleichgewicht hatten (für  $\Gamma_{WiT}(x)$  und  $\Gamma_{LoB}(x)$ ) und  $ET(\Gamma_{LoB}(x)) = 0$  erfüllten. Für diese Spiele wurde ein **Quotient** von 1 angenommen:  $\frac{ET(\Gamma_{LoB}(x))}{ET(\Gamma)} = 1$ .

$x$	$U_1$	$U_3$	$U_{ges}$	$Q_{WiT}$	$Q_{LoB}$
0.01	0	52	52	25048	25048
0.02	0	111	111	25048	25048
0.03	0	178	178	25048	25048
0.04	0	251	251	25048	25048
0.05	0	276	276	25048	25048
0.06	0	339	339	25048	25048
0.07	0	400	400	25048	25048
0.08	0	463	463	25048	25048
0.09	0	532	532	25048	25048
0.1	0	584	584	25048	25048
0.11	0	635	635	25048	25048
0.12	0	691	691	25048	25048
0.13	0	733	733	25048	25048
0.14	0	798	798	25048	25048
0.15	0	863	863	25048	25048
0.16	0	910	910	25048	25048
0.17	0	970	970	25048	25048
0.18	0	1026	1026	25048	25048
0.19	0	1098	1098	25048	25048
0.2	0	1176	1176	25048	25048
0.21	1	1259	1260	25047	25047
0.22	1	1321	1322	25047	25047
0.23	3	1391	1394	25045	25045
0.24	3	1463	1466	25045	25045
0.25	3	1525	1528	25045	25045
0.26	3	1591	1594	25045	25045
0.27	3	1652	1655	25045	25045
0.28	4	1743	1747	25044	25044
0.29	4	1836	1840	25044	25044
0.3	4	1914	1918	25044	25044
0.31	5	1986	1991	25043	25043
0.32	5	2046	2051	25043	25043
0.33	5	2103	2108	25043	25043
0.34	5	2209	2214	25043	25043
0.35	8	2271	2279	25040	25040
0.36	10	2337	2347	25038	25038
0.37	11	2414	2425	25037	25037
0.38	11	2489	2500	25037	25037
0.39	12	2574	2586	25036	25036
0.4	13	2652	2665	25035	25035
0.41	14	2734	2748	25034	25034
0.42	14	2806	2820	25034	25034
0.43	16	2893	2909	25032	25032
0.44	17	2962	2979	25031	25031
0.45	17	3040	3057	25031	25031
0.46	17	3129	3146	25031	25031
0.47	18	3228	3246	25030	25030
0.48	20	3307	3327	25028	25028
0.49	21	3389	3410	25027	25027
0.5	23	3473	3496	25025	25025

$x$	$U_1$	$U_3$	$U_{ges}$	$Q_{WiT}$	$Q_{LoB}$
0.51	25	3546	3571	25023	25023
0.52	27	3630	3657	25021	25021
0.53	27	3720	3747	25021	25021
0.54	29	3798	3827	25019	25019
0.55	31	3874	3905	25017	25017
0.56	31	3949	3980	25017	25017
0.57	33	4031	4064	25015	25015
0.58	34	4131	4165	25014	25014
0.59	35	4237	4272	25013	25013
0.6	39	4324	4363	25009	25009
0.61	43	4414	4457	25005	25005
0.62	46	4542	4588	25002	25002
0.63	48	4642	4690	25000	25000
0.64	52	4725	4777	24996	24996
0.65	55	4831	4886	24993	24993
0.66	59	4947	5006	24989	24989
0.67	60	5073	5133	24988	24988
0.68	63	5180	5243	24985	24985
0.69	68	5272	5340	24980	24980
0.7	69	5376	5445	24979	24979
0.71	72	5479	5551	24976	24976
0.72	77	5613	5690	24971	24971
0.73	83	5715	5798	24965	24965
0.74	89	5818	5907	24959	24959
0.75	92	5943	6035	24956	24956
0.76	97	6059	6156	24951	24951
0.77	103	6180	6283	24945	24945
0.78	105	6329	6434	24943	24943
0.79	108	6443	6551	24940	24940
0.8	112	6585	6697	24936	24936
0.81	115	6705	6820	24933	24933
0.82	120	6837	6957	24928	24928
0.83	124	6974	7098	24924	24924
0.84	124	7100	7224	24924	24924
0.85	127	7242	7369	24921	24921
0.86	132	7351	7483	24916	24916
0.87	139	7495	7634	24909	24909
0.88	144	7632	7776	24904	24904
0.89	147	7790	7937	24901	24901
0.9	154	7932	8086	24894	24894
0.91	158	8100	8258	24890	24890
0.92	164	8263	8427	24884	24884
0.93	170	8433	8603	24878	24878
0.94	176	8616	8792	24872	24872
0.95	183	8787	8970	24865	24865
0.96	188	8965	9153	24860	24860
0.97	193	9155	9348	24855	24855
0.98	197	9369	9566	24851	24851
0.99	204	9628	9832	24844	24844

Tabelle A.13.: Sonderfälle im Experiment 1(a) für  $n = 4$  und  $N = 5 \cdot 10^4$

**Experiment 1(a) (S. 59) für  $n = 5$  und  $N = 5 \cdot 10^4$  (zu S. 69).**

Trägermächtigkeit	1	2	3	4	5	1, 2, 3, 4 oder 5
Anzahl der zufällig erzeugten Spiele $\Gamma$	15581	0	31246	0	3173	50000
davon Spiele mit $ET(\Gamma) = 0$	15581	0	0	0	0	15581

Die folgende Tabelle A.14 enthält für festen Prozentsatz  $x \in \{0.01, 0.02, \dots, 0.99\}$  die Anzahl der zufällig erzeugten **symmetrischen** Spiele, die im Experiment 1(a) (für  $n = 5$  und  $N = 5 \cdot 10^4$ ) kein eindeutiges Gleichgewicht lieferten. Außerdem findet man, wie viele Spiele bei der Quotientenbildung  $\frac{ET(\Gamma_{WiT}(x))}{ET(\Gamma)}$  bzw.  $\frac{ET(\Gamma_{LoB}(x))}{ET(\Gamma)}$  gesondert behandelt wurden wurden (siehe Beschreibung des Experiments 1 auf S. 59). Der Fall  $ET(\Gamma) = 0$  trat nur bei Ausgangsspielen mit reinem Gleichgewicht auf. Hatten die daraus entstandenen Bimatrixspiele ein eindeutiges Gleichgewicht, so betrug der Erwartete Transfer auch dort Null. Dann wurde ein Quotient von 1 angenommen. Es musste kein Spiel ausgeschlossen werden.

Im Folgenden ist:

- x:** der Steuersatz.
- $U_{ges}$ :** die Anzahl aller Spiele  $\Gamma$ , die für  $x$  ein **uneindeutiges** Gleichgewicht in mindestens einem der Spiele  $\Gamma_{WiT}(x)$  oder  $\Gamma_{LoB}(x)$  hatten.
- $Q_{WiT}$ :** die Anzahl aller Spiele  $\Gamma$  mit  $ET(\Gamma = 0)$ , die für  $x$  ein **eindeutiges** Gleichgewicht hatten (für  $\Gamma_{WiT}(x)$  und  $\Gamma_{LoB}(x)$ ) und  $ET(\Gamma_{WiT}(x)) = 0$  erfüllten. Für diese Spiele wurde ein **Quotient** von 1 angenommen:  $\frac{ET(\Gamma_{WiT}(x))}{ET(\Gamma)} = 1$ .
- $Q_{LoB}$ :** die Anzahl aller Spiele  $\Gamma$  mit  $ET(\Gamma = 0)$ , die für  $x$  ein **eindeutiges** Gleichgewicht hatten (für  $\Gamma_{WiT}(x)$  und  $\Gamma_{LoB}(x)$ ) und  $ET(\Gamma_{LoB}(x)) = 0$  erfüllten. Für diese Spiele wurde ein **Quotient** von 1 angenommen:  $\frac{ET(\Gamma_{LoB}(x))}{ET(\Gamma)} = 1$ .

$x$	$U_{ges}$	$Q_{WiT}$	$Q_{LoB}$	$x$	$U_{ges}$	$Q_{WiT}$	$Q_{LoB}$
0.01	149	15581	15581	0.51	9141	15532	15532
0.02	307	15581	15581	0.52	9353	15530	15530
0.03	463	15581	15581	0.53	9559	15525	15525
0.04	603	15581	15581	0.54	9763	15523	15523
0.05	748	15581	15581	0.55	9938	15523	15523
0.06	924	15581	15581	0.56	10176	15523	15523
0.07	1069	15581	15581	0.57	10364	15515	15515
0.08	1233	15581	15581	0.58	10557	15509	15509
0.09	1358	15580	15580	0.59	10784	15505	15505
0.1	1513	15580	15580	0.6	11024	15503	15503
0.11	1649	15580	15580	0.61	11277	15495	15495
0.12	1809	15580	15580	0.62	11511	15490	15490
0.13	1961	15580	15580	0.63	11726	15487	15487
0.14	2130	15580	15580	0.64	11902	15483	15483
0.15	2284	15580	15580	0.65	12134	15481	15481
0.16	2486	15580	15580	0.66	12308	15473	15473
0.17	2669	15579	15579	0.67	12530	15462	15462
0.18	2870	15579	15579	0.68	12762	15458	15458
0.19	3068	15579	15579	0.69	13012	15452	15452
0.2	3212	15578	15578	0.7	13261	15449	15449
0.21	3362	15576	15576	0.71	13481	15443	15443
0.22	3521	15576	15576	0.72	13706	15440	15440
0.23	3690	15576	15576	0.73	13942	15435	15435
0.24	3874	15574	15574	0.74	14130	15432	15432
0.25	4063	15573	15573	0.75	14368	15427	15427
0.26	4236	15573	15573	0.76	14595	15417	15417
0.27	4430	15572	15572	0.77	14840	15406	15406
0.28	4639	15569	15569	0.78	15109	15401	15401
0.29	4839	15569	15569	0.79	15337	15394	15394
0.3	5001	15568	15568	0.8	15572	15386	15386
0.31	5222	15566	15566	0.81	15832	15379	15379
0.32	5417	15566	15566	0.82	16158	15371	15371
0.33	5605	15563	15563	0.83	16388	15364	15364
0.34	5784	15561	15561	0.84	16616	15358	15358
0.35	5940	15560	15560	0.85	16883	15352	15352
0.36	6137	15559	15559	0.86	17142	15343	15343
0.37	6348	15556	15556	0.87	17419	15333	15333
0.38	6575	15556	15556	0.88	17665	15320	15320
0.39	6770	15554	15554	0.89	17908	15308	15308
0.4	6969	15551	15551	0.9	18151	15297	15297
0.41	7177	15550	15550	0.91	18373	15285	15285
0.42	7361	15547	15547	0.92	18661	15276	15276
0.43	7561	15547	15547	0.93	18971	15265	15265
0.44	7744	15545	15545	0.94	19271	15248	15248
0.45	7961	15544	15544	0.95	19546	15228	15228
0.46	8163	15542	15542	0.96	19872	15217	15217
0.47	8345	15541	15541	0.97	20202	15203	15203
0.48	8543	15540	15540	0.98	20599	15189	15189
0.49	8723	15537	15537	0.99	20972	15167	15167
0.5	8930	15534	15534				

Tabelle A.14.: Sonderfälle im Experiment 1(a) für  $n = 5$  und  $N = 5 \cdot 10^4$



**Experiment 1(b) (S. 59) für  $n = 4$  und  $N = 5 \cdot 10^4$  (zu S. 70).**

Ergebnisse getrennt nach der Trägermächtigkeit der Gleichgewichts-Strategien im Ausgangsspiel.

Trägermächtigkeit	1	2	3	4	1, 2, 3 oder 4
Anzahl der zufällig erzeugten Spiele $\Gamma$	5712	26005	16855	1428	50000
davon Spiele mit $ET(\Gamma) = 0$	5712	0	0	0	5712

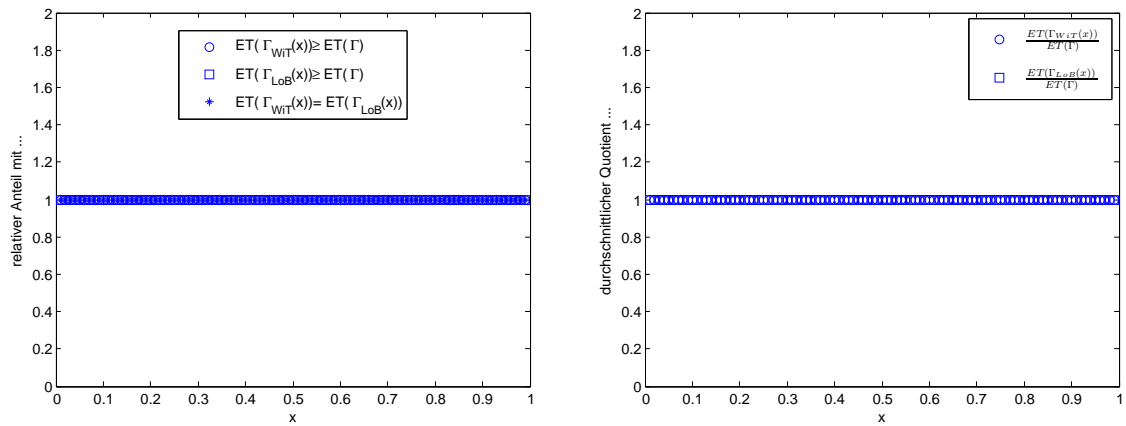


Abbildung A.11.: Ergebnisse des Experiments 1(b) für zufällige **faire**  $4 \times 4$  - Spiele: nur Instanzen mit  $|\text{supp}(\bar{p})| = |\text{supp}(\bar{q})| = 1$

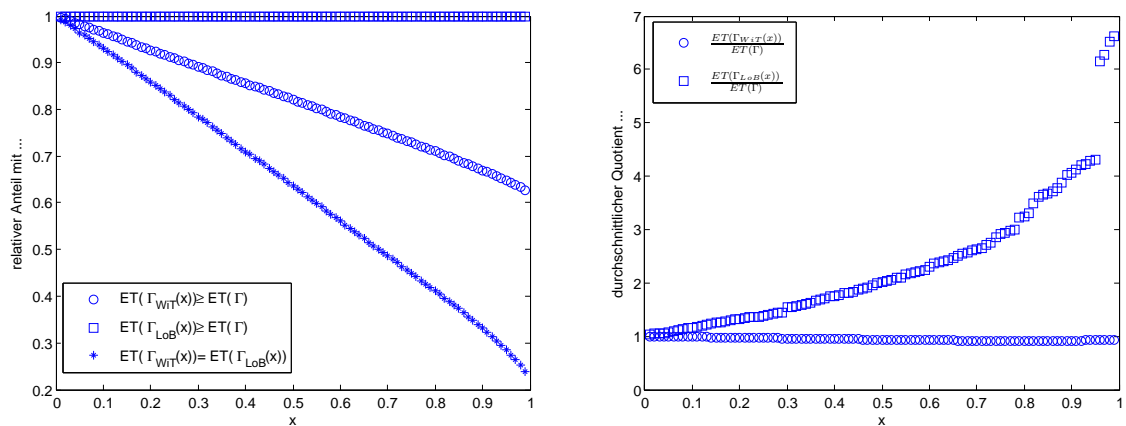


Abbildung A.12.: Ergebnisse des Experiments 1(b) für zufällige **faire**  $4 \times 4$  - Spiele: nur Instanzen mit  $|\text{supp}(\bar{p})| = |\text{supp}(\bar{q})| = 2$

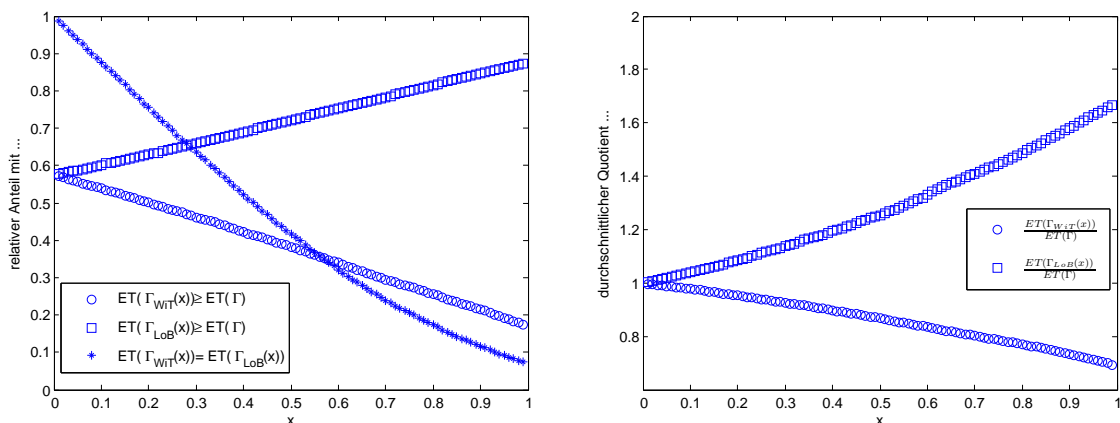


Abbildung A.13.: Ergebnisse des Experiments 1(b) für zufällige **faire**  $4 \times 4$  - Spiele: nur Instanzen mit  $|\text{supp}(\bar{p})| = |\text{supp}(\bar{q})| = 3$

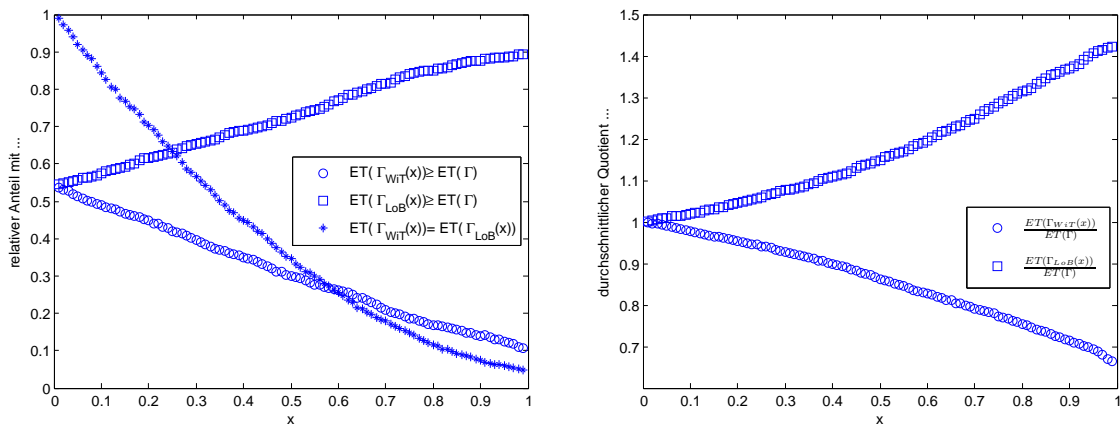


Abbildung A.14.: Ergebnisse des Experiments 1(b) für zufällige **faire**  $4 \times 4$  - Spiele: nur Instanzen mit  $|\text{supp}(\bar{p})| = |\text{supp}(\bar{q})| = 4$

Die Tabelle A.15 zeigt für festen Prozentsatz  $x \in \{0.01, 0.02, \dots, 0.99\}$  die Anzahl der erzeugten **fairen** Spiele, die im Experiment 1(b) (für  $n = 4$  und  $N = 5 \cdot 10^4$ ) kein eindeutiges Gleichgewicht lieferten (getrennt nach der Trägermächtigkeit der Gleichgewichts-Strategien im Ausgangsspiel). Man findet auch, wie viele Spiele bei der Quotientenbildung  $\frac{ET(\Gamma_{WiT}(x))}{ET(\Gamma)}$  bzw.  $\frac{ET(\Gamma_{LoB}(x))}{ET(\Gamma)}$  gesondert behandelt wurden (siehe Beschreibung des Experiments 1 auf S. 59). Der Fall  $ET(\Gamma) = 0$  trat nur bei Ausgangsspielen mit reinem Gleichgewicht auf. Hatten die daraus entstandenen Bimatrixspiele ein eindeutiges Gleichgewicht, so betrug der Erwartete Transfer auch dort Null. Dann wurde ein Quotient von 1 angenommen. Es musste kein Spiel ausgeschlossen werden.

Im Folgenden ist:

- $x$ : der Steuersatz.
- $U_i$ : die Anzahl der Spiele  $\Gamma$  mit Gleichgewichts-Strategien der Trägermächtigkeit  $i$ , die für  $x$  ein **uneindeutiges** Gleichgewicht in mindestens einem der Spiele  $\Gamma_{WiT}(x)$  oder  $\Gamma_{LoB}(x)$  hatten.
- $U_{ges}$ : die Anzahl aller Spiele  $\Gamma$ , die für  $x$  ein **uneindeutiges** Gleichgewicht in mindestens einem der Spiele  $\Gamma_{WiT}(x)$  oder  $\Gamma_{LoB}(x)$  hatten.
- $Q_{WiT}$ : die Anzahl aller Spiele  $\Gamma$  mit  $ET(\Gamma) = 0$ , die für  $x$  ein **eindeutiges** Gleichgewicht hatten (für  $\Gamma_{WiT}(x)$  und  $\Gamma_{LoB}(x)$ ) und  $ET(\Gamma_{WiT}(x)) = 0$  erfüllten. Für diese Spiele wurde ein **Quotient** von 1 angenommen:  $\frac{ET(\Gamma_{WiT}(x))}{ET(\Gamma)} = 1$ .
- $Q_{LoB}$ : die Anzahl aller Spiele  $\Gamma$  mit  $ET(\Gamma) = 0$ , die für  $x$  ein **eindeutiges** Gleichgewicht hatten (für  $\Gamma_{WiT}(x)$  und  $\Gamma_{LoB}(x)$ ) und  $ET(\Gamma_{LoB}(x)) = 0$  erfüllten. Für diese Spiele wurde ein **Quotient** von 1 angenommen:  $\frac{ET(\Gamma_{LoB}(x))}{ET(\Gamma)} = 1$ .

$x$	$U_1$	$U_2$	$U_3$	$U_4$	$U_{ges}$	$Q_{WiT}$	$Q_{LoB}$
0.01	0	0	0	0	0	5712	5712
0.02	0	0	0	0	0	5712	5712
0.03	0	0	0	0	0	5712	5712
0.04	0	0	0	0	0	5712	5712
0.05	0	0	0	0	0	5712	5712
0.06	0	0	0	0	0	5712	5712
0.07	0	0	0	0	0	5712	5712
0.08	0	0	0	0	0	5712	5712
0.09	0	0	1	0	1	5712	5712
0.1	0	0	1	0	1	5712	5712
0.11	0	1	1	0	2	5712	5712
0.12	0	1	1	0	2	5712	5712
0.13	0	1	1	0	2	5712	5712
0.14	0	1	1	0	2	5712	5712
0.15	0	2	1	0	3	5712	5712
0.16	0	4	1	0	5	5712	5712
0.17	0	3	1	0	4	5712	5712
0.18	0	2	1	0	3	5712	5712
0.19	0	1	3	0	4	5712	5712
0.2	0	2	4	0	6	5712	5712
0.21	0	2	4	0	6	5712	5712
0.22	0	2	4	0	6	5712	5712
0.23	0	3	4	0	7	5712	5712
0.24	0	3	5	0	8	5712	5712
0.25	0	5	5	0	10	5712	5712
0.26	0	6	5	0	11	5712	5712
0.27	0	5	6	0	11	5712	5712
0.28	0	5	6	0	11	5712	5712
0.29	0	5	7	0	12	5712	5712
0.3	0	5	7	0	12	5712	5712
0.31	0	6	5	0	11	5712	5712
0.32	0	6	6	0	12	5712	5712
0.33	0	6	5	0	11	5712	5712
0.34	0	5	6	0	11	5712	5712
0.35	0	8	6	0	14	5712	5712
0.36	0	10	5	1	16	5712	5712
0.37	0	12	6	1	19	5712	5712
0.38	0	12	7	2	21	5712	5712
0.39	1	13	9	2	25	5711	5711
0.4	1	10	9	2	22	5711	5711
0.41	1	12	12	2	27	5711	5711
0.42	1	12	16	2	31	5711	5711
0.43	1	14	18	2	35	5711	5711
0.44	1	17	19	2	39	5711	5711
0.45	1	18	19	3	41	5711	5711
0.46	1	19	25	2	47	5711	5711
0.47	1	24	22	2	49	5711	5711
0.48	1	25	27	2	55	5711	5711
0.49	1	24	26	4	55	5711	5711
0.5	1	26	27	6	60	5711	5711

$x$	$U_1$	$U_2$	$U_3$	$U_4$	$U_{ges}$	$Q_{WiT}$	$Q_{LoB}$
0.51	3	25	28	6	62	5709	5709
0.52	4	22	31	7	64	5708	5708
0.53	5	26	31	8	70	5707	5707
0.54	5	25	34	10	74	5707	5707
0.55	5	27	39	11	82	5707	5707
0.56	5	30	41	9	85	5707	5707
0.57	5	35	42	8	90	5707	5707
0.58	6	39	48	8	101	5706	5706
0.59	6	42	48	7	103	5706	5706
0.6	6	41	51	8	106	5706	5706
0.61	8	40	57	8	113	5704	5704
0.62	9	43	60	9	121	5703	5703
0.63	9	46	63	9	127	5703	5703
0.64	10	50	67	10	137	5702	5702
0.65	10	55	66	10	141	5702	5702
0.66	12	51	76	10	149	5700	5700
0.67	13	56	82	11	162	5699	5699
0.68	13	64	84	13	174	5699	5699
0.69	15	63	94	13	185	5697	5697
0.7	16	63	97	14	190	5696	5696
0.71	17	65	100	16	198	5695	5695
0.72	18	69	104	17	208	5694	5694
0.73	19	70	111	18	218	5693	5693
0.74	20	72	116	20	228	5692	5692
0.75	21	79	125	21	246	5691	5691
0.76	22	74	132	22	250	5690	5690
0.77	22	80	138	20	260	5690	5690
0.78	24	80	144	20	268	5688	5688
0.79	27	89	152	20	288	5685	5685
0.8	27	98	157	21	303	5685	5685
0.81	28	99	161	21	309	5684	5684
0.82	31	99	180	21	331	5681	5681
0.83	31	100	193	22	346	5681	5681
0.84	33	98	197	22	350	5679	5679
0.85	36	101	201	25	363	5676	5676
0.86	37	101	204	26	368	5675	5675
0.87	39	104	208	27	378	5673	5673
0.88	42	107	207	26	382	5670	5670
0.89	45	114	222	27	408	5667	5667
0.9	48	124	223	31	426	5664	5664
0.91	49	126	228	32	435	5663	5663
0.92	51	128	233	30	442	5661	5661
0.93	54	124	244	33	455	5658	5658
0.94	59	127	251	32	469	5653	5653
0.95	65	135	262	35	497	5647	5647
0.96	68	139	279	35	521	5644	5644
0.97	70	148	286	33	537	5642	5642
0.98	73	163	294	34	564	5639	5639
0.99	77	163	301	36	577	5635	5635

Tabelle A.15.: Sonderfälle im Experiment 1(b) für  $n = 4$  und  $N = 5 \cdot 10^4$

**Experiment 1(b) (S. 59) für  $n = 5$  und  $N = 5 \cdot 10^4$  (zu S. 71).**

Trägermächtigkeit	1	2	3	4	5	1, 2, 3, 4 oder 5
Anzahl der zufällig erzeugten Spiele $\Gamma$	2025	15879	23781	7917	398	50000
davon Spiele mit $ET(\Gamma) = 0$	2025	0	0	0	0	2025

Die folgende Tabelle A.16 enthält für festen Prozentsatz  $x \in \{0.01, 0.02, \dots, 0.99\}$  die Anzahl der zufällig erzeugten **fairen** Spiele, die im Experiment 1(b) (für  $n = 5$  und  $N = 5 \cdot 10^4$ ) kein eindeutiges Gleichgewicht lieferten. Außerdem findet man, wie viele Spiele bei der Quotientenbildung  $\frac{ET(\Gamma_{WiT}(x))}{ET(\Gamma)}$  bzw.  $\frac{ET(\Gamma_{LoB}(x))}{ET(\Gamma)}$  gesondert behandelt wurden wurden (siehe Beschreibung des Experiments 1 auf S. 59). Der Fall  $ET(\Gamma) = 0$  trat nur bei Ausgangsspielen mit reinem Gleichgewicht auf. Hatten die daraus entstandenen Bimatrixspiele ein eindeutiges Gleichgewicht, so betrug der Erwartete Transfer auch dort Null. Dann wurde ein Quotient von 1 angenommen. Es musste kein Spiel ausgeschlossen werden.

Im Folgenden ist:

- x:** der Steuersatz.
- $U_{ges}$ :** die Anzahl aller Spiele  $\Gamma$ , die für  $x$  ein uneindeutiges Gleichgewicht in mindestens einem der Spiele  $\Gamma_{WiT}(x)$  oder  $\Gamma_{LoB}(x)$  hatten.
- $Q_{WiT}$ :** die Anzahl aller Spiele  $\Gamma$  mit  $ET(\Gamma) = 0$ , die für  $x$  ein eindeutiges Gleichgewicht hatten (für  $\Gamma_{WiT}(x)$  und  $\Gamma_{LoB}(x)$ ) und  $ET(\Gamma_{WiT}(x)) = 0$  erfüllten. Für diese Spiele wurde ein Quotient von 1 angenommen:  $\frac{ET(\Gamma_{WiT}(x))}{ET(\Gamma)} = 1$ .
- $Q_{LoB}$ :** die Anzahl aller Spiele  $\Gamma$  mit  $ET(\Gamma) = 0$ , die für  $x$  ein eindeutiges Gleichgewicht hatten (für  $\Gamma_{WiT}(x)$  und  $\Gamma_{LoB}(x)$ ) und  $ET(\Gamma_{LoB}(x)) = 0$  erfüllten. Für diese Spiele wurde ein Quotient von 1 angenommen:  $\frac{ET(\Gamma_{LoB}(x))}{ET(\Gamma)} = 1$ .

$x$	$U_{ges}$	$Q_{WiT}$	$Q_{LoB}$	$x$	$U_{ges}$	$Q_{WiT}$	$Q_{LoB}$
0.01	0	2025	2025	0.51	227	2025	2025
0.02	0	2025	2025	0.52	237	2024	2024
0.03	0	2025	2025	0.53	258	2024	2024
0.04	0	2025	2025	0.54	283	2024	2024
0.05	0	2025	2025	0.55	303	2024	2024
0.06	0	2025	2025	0.56	318	2024	2024
0.07	0	2025	2025	0.57	341	2024	2024
0.08	1	2025	2025	0.58	357	2024	2024
0.09	2	2025	2025	0.59	392	2022	2022
0.1	1	2025	2025	0.6	409	2021	2021
0.11	1	2025	2025	0.61	422	2020	2020
0.12	2	2025	2025	0.62	457	2018	2018
0.13	4	2025	2025	0.63	473	2017	2017
0.14	5	2025	2025	0.64	495	2017	2017
0.15	5	2025	2025	0.65	512	2016	2016
0.16	4	2025	2025	0.66	537	2015	2015
0.17	3	2025	2025	0.67	567	2015	2015
0.18	6	2025	2025	0.68	593	2015	2015
0.19	6	2025	2025	0.69	611	2014	2014
0.2	9	2025	2025	0.7	633	2013	2013
0.21	12	2025	2025	0.71	667	2012	2012
0.22	12	2025	2025	0.72	713	2012	2012
0.23	15	2025	2025	0.73	748	2012	2012
0.24	15	2025	2025	0.74	786	2010	2010
0.25	18	2025	2025	0.75	833	2008	2008
0.26	20	2025	2025	0.76	846	2008	2008
0.27	22	2025	2025	0.77	861	2006	2006
0.28	24	2025	2025	0.78	897	2004	2004
0.29	30	2025	2025	0.79	936	2002	2002
0.3	34	2025	2025	0.8	982	2002	2002
0.31	38	2025	2025	0.81	1009	2001	2001
0.32	41	2025	2025	0.82	1084	2000	2000
0.33	47	2025	2025	0.83	1123	2000	2000
0.34	50	2025	2025	0.84	1167	1999	1999
0.35	57	2025	2025	0.85	1209	1998	1998
0.36	60	2025	2025	0.86	1251	1994	1994
0.37	64	2025	2025	0.87	1324	1992	1992
0.38	72	2025	2025	0.88	1380	1989	1989
0.39	79	2025	2025	0.89	1433	1988	1988
0.4	85	2025	2025	0.9	1494	1986	1986
0.41	96	2025	2025	0.91	1559	1983	1983
0.42	109	2025	2025	0.92	1616	1981	1981
0.43	120	2025	2025	0.93	1678	1979	1979
0.44	133	2025	2025	0.94	1728	1973	1973
0.45	139	2025	2025	0.95	1791	1969	1969
0.46	150	2025	2025	0.96	1850	1965	1965
0.47	165	2025	2025	0.97	1895	1958	1958
0.48	176	2025	2025	0.98	1963	1953	1953
0.49	195	2025	2025	0.99	2037	1950	1950
0.5	212	2025	2025				

Tabelle A.16.: Sonderfälle im Experiment 1(b) für  $n = 5$  und  $N = 5 \cdot 10^4$

## A.4. CD-Wegweiser zum Auffinden von digital beigefügten Quellcodes

Innerhalb der Arbeit wurden zahlreiche Rechnungen und Experimente mit Hilfe der Software Matlab (Version 7.12.0.635, R2011a) durchgeführt. Die beigefügte CD enthält im Ordner **Matlab-Programme** alle Quellcodes und Programme, die dafür geschrieben wurden. Die nachfolgende Auflistung gibt eine Übersicht. Die **Ordnernamen** sind fett, die *Programmnamen* kursiv und die Erklärungen normal gedruckt.

- **symbolische Rechnungen**

- *steuer2dim.m* Berechnung der Gleichgewichts-Strategien, der erwarteten Auszahlungen und des Erwarteten Transfers in den Steuerszenarien für faire  $2 \times 2$  - Matrixspiele mit gemischtem Gleichgewicht (zu S. 37)
- *bonus2dim.m* Berechnung der Gleichgewichts-Strategien, der erwarteten Auszahlungen und des Erwarteten Transfers in den Bonuszenarien für faire  $2 \times 2$  - Matrixspiele mit gemischtem Gleichgewicht (zu S. 37)
- *steuer3dim.m* Berechnung der Gleichgewichts-Strategien, der erwarteten Auszahlungen und des Erwarteten Transfers in den Steuerszenarien für symmetrische  $3 \times 3$  - Matrixspiele mit gemischtem Gleichgewicht (zu S. 54)
- *bonus3dim.m* Berechnung der Gleichgewichts-Strategien, der erwarteten Auszahlungen und des Erwarteten Transfers in den Bonuszenarien für symmetrische  $3 \times 3$  - Matrixspiele mit gemischtem Gleichgewicht (zu S. 54)
- *vergleichET2dim.m* Berechnung der Differenzen und Quotienten aus den Erwarteten Transfers der Steuerszenarien für faire  $2 \times 2$  - Matrixspiele mit gemischtem Gleichgewicht (zu S. 38, S. 40)
- *vergleichET3dim.m* Berechnung der Differenzen und Quotienten aus den Erwarteten Transfers der Steuerszenarien für faire  $3 \times 3$  - Matrixspiele mit gemischtem Gleichgewicht (zu S. 55)

- **Konkrete Beispiele**

- *nahgg.m* Funktion zur Berechnung aller (extremalen) Gleichgewichte eines beliebigen Bimatrixspiels  $\Gamma = (A, B)$  mit  $n \times n$  - Matrizen  $A, B$  (mit Toleranz  $10^{-12}$  bei Gleichheitsprüfungen)
- *Grafiken6Szenarien.m* Programm zum Erstellen einer Grafik: Verlauf des Erwarteten Transfers in den sechs Manipulations-Szenarien für ein vorgegebenes quadratisches Ausgangsspiel  $\Gamma = (A, -A)$  und Prozentsätze  $x \in (0, 1)$ ; außerdem Ausgabe der Ergebnisse für den Standard-Prozentsatz  $x = 0.1$ . (z.B. S. 29, S. 31)

- *Grafiken2Szenarien.m* Programm zum Erstellen einer Grafik: Verlauf des Erwarteten Transfers in den beiden Basis-Szenarien (WiT, LoB) für ein vorgegebenes quadratisches Ausgangsspiel  $\Gamma = (A, -A)$  und Prozentsätze  $x \in (0, 1)$ ; außerdem Ausgabe Trägermächtigkeiten der Gleichgewichts-Strategien (z.B. S. 64)
- *GrafikWiTWiB.m* Programm zum Erstellen einer Grafik: Verlauf des Erwarteten Transfers in den beiden Szenarien (WiT, WiB) gemäß der Bemerkung 3.1.9 (S. 39) bzw. Bemerkung 3.2.4 (S. 56)
- **Experimente** im Folgenden enthalten alle Unterordner:
  - *nashgg.m* Berechnung der Gleichgewichte eines Bimatrixspiels (s.o.)
  - *Grafik.m* Programm zur grafischen Darstellung der Ergebnisse
  - *tabProbleme.m* Programm zur Ausgabe der Anzahl der Instanzen ohne eindeutigen Gleichgewicht und mit Sonderbehandlung bei der Quotientenbildung (gemäß Beschreibung des Experiments 1, S. 59)
  - **Ergebnisse** Ordner mit allen Ergebnissen des durchgeführten Zufallsexperiments, einschließlich der Saat

Die folgenden Ordner enthalten die Programme für die Zufalls-Experimente zu den entsprechenden Dimensionen.

- **2x2** *anteil.m, zuf2x2.m* Funktion und Programm zur Durchführung des Experiments mit zufälligen  $2 \times 2$  - Spielen (zu S. 44) sowie zum Testen der Vermutung 3.1.13 (auf S. 44)
- **3x3**
  - \* **fair** *anteil.m, fair3x3.m* Funktion und Programm zur Durchführung des Experiments 1(b) (zu S. 60)
  - \* **zufaellig** *anteil.m, zuf3x3.m* Funktion und Programm zur Durchführung des Experiments 1(c) (zu S. 62)
- **4x4**
  - \* **symmetrisch** *anteil.m, symm4x4.m* Funktion und Programm zur Durchführung des Experiments 1(a) (zu S. 68)
  - \* **fair** *anteil.m, fair4x4.m* Funktion und Programm zur Durchführung des Experiments 1(b) (zu S. 70)
- **5x5**
  - \* **symmetrisch** *anteil.m, symm5x5.m* Funktion und Programm zur Durchführung des Experiments 1(a) (zu S. 69)
  - \* **fair** *anteil.m, fair5x5.m* Funktion und Programm zur Durchführung des Experiments 1(b) (zu S. 71)

Auf der CD befindet sich außerdem ein Ordner **Diplomarbeit**. Darin ist eine Kopie dieser Diplomarbeit als .pdf - Datei enthalten.

# Verzeichnis der Tabellen

2.1.	Definition der Auszahlungsmatrizen in den sechs betrachteten Manipulations-Szenarien . . . . .	24
3.1.	Ergebnisse für Spiel 3 (Standardbeispiel, S. 25) mit Steuer- bzw. Bonussatz $x = 0.1$ . . . . .	29
3.2.	Erwarteter Transfer für faire, nicht-degenerierte $2 \times 2$ - Matrixspiele mit gemischtem Gleichgewicht und die Szenarien „Winner Tax“, „Loser Bonus“	36
3.3.	Supremum des Quotienten $\frac{ET(\Gamma_{\text{Tax}}(1))}{ET(\Gamma)}$ für die drei Steuerszenarien . . . . .	40
3.4.	Ergebnisse für Spiel 6 (S. 46) mit Steuer- bzw. Bonussatz $x = 0.1$ . . . . .	48
A.1.	Auszahlungsmatrizen für faire, nicht-degenerierte $2 \times 2$ - Spiele mit gemischtem Gleichgewicht und alle sechs Szenarien . . . . .	77
A.2.	Gleichgewichts-Strategien und erwartete Auszahlung für faire, nicht-degenerierte $2 \times 2$ - Spiele mit gemischtem Gleichgewicht und alle sechs Szenarien . . . . .	78
A.3.	Erwarteter Transfer für faire, nicht-degenerierte $2 \times 2$ - Spiele mit gemischtem Gleichgewicht und alle sechs Szenarien . . . . .	79
A.4.	Ergebnisse für Spiel 5 (S. 43) mit Steuer- bzw. Bonussatz $x = 0.1$ . . . . .	81
A.5.	Auszahlungsmatrizen für symmetrische, nicht-degenerierte $3 \times 3$ - Spiele mit gemischtem Gleichgewicht und alle sechs Szenarien . . . . .	83
A.6.	Gleichgewichts-Strategien und erwartete Auszahlung für symmetrische, nicht-degenerierte $3 \times 3$ - Spiele mit gemischtem Gleichgewicht und alle sechs Szenarien . . . . .	84
A.7.	Erwarteter Transfer für symmetrische, nicht-degenerierte $3 \times 3$ - Spiele mit gemischtem Gleichgewicht und alle sechs Szenarien . . . . .	85
A.8.	Ergebnisse für Spiel 7 (S. 57) mit Steuer- bzw. Bonussatz $x = 0.1$ . . . . .	87
A.9.	Sonderfälle im Experiment 1(b) für $n = 3$ und $N = 10^5$ . . . . .	89
A.10.	Sonderfälle im Experiment 1(c) für $n = 3$ und $N = 10^5$ . . . . .	91
A.11.	Ergebnisse für Spiel 8 (S. 63) mit Steuer- bzw. Bonussatz $x = 0.1$ . . . . .	92
A.12.	Ergebnisse für Spiel 9 (S. 65) mit Steuer- bzw. Bonussatz $x = 0.1$ . . . . .	93
A.13.	Sonderfälle im Experiment 1(a) für $n = 4$ und $N = 5 \cdot 10^4$ . . . . .	95
A.14.	Sonderfälle im Experiment 1(a) für $n = 5$ und $N = 5 \cdot 10^4$ . . . . .	96
A.15.	Sonderfälle im Experiment 1(b) für $n = 4$ und $N = 5 \cdot 10^4$ . . . . .	99
A.16.	Sonderfälle im Experiment 1(b) für $n = 5$ und $N = 5 \cdot 10^4$ . . . . .	100

# Verzeichnis der Abbildungen

3.1.	Erwarteter Transfer in den sechs Szenarien für Spiel 3 (S. 25), in Abhängigkeit vom Prozentsatz $x$ . . . . .	31
3.2.	Zusammenhang des Erwarteten Transfers in den Szenarien „Winner Tax“ und „Winner Bonus“ für Spiel 3 (S. 25) . . . . .	39
3.3.	Erwarteter Transfer in den sechs Szenarien für Spiel 5 (S. 43), in Abhängigkeit vom Prozentsatz $x$ . . . . .	43
3.4.	Ergebnisse des Experiments für <b>zufällige</b> $2 \times 2$ - Spiele: alle Instanzen . . . . .	45
3.5.	Erwarteter Transfer in den sechs Szenarien für Spiel 6 (S. 46), in Abhängigkeit vom Prozentsatz $x$ . . . . .	47
3.6.	Zusammenhang des Erwarteten Transfers in den Szenarien „Winner Tax“ und „Winner Bonus“ für Spiel 6 (S. 46) . . . . .	56
3.7.	Erwarteter Transfer in den Szenarien „Winner Tax“ und „Loser Bonus“ für Spiel 7 (S. 57), in Abhängigkeit vom Prozentsatz $x$ . . . . .	58
3.8.	prozentualer Anteil der <b>fairen</b> $3 \times 3$ - Testinstanzen mit wachsendem oder gleich bleibendem Erwarteten Transfer in den Basis-Szenarien . . . . .	60
3.9.	durchschnittlicher Quotient aus dem Erwarteten Transfer nach und vor Manipulation für die <b>fairen</b> $3 \times 3$ - Testinstanzen und die Basis-Szenarien . . . . .	61
3.10.	Ergebnisse des Experiments 1(c) für <b>zufällige</b> $3 \times 3$ - Spiele: alle Test-Instanzen . . . . .	62
4.1.	Erwarteter Transfer in den Szenarien „Winner Tax“ und „Loser Bonus“ für Spiel 8 (S. 63), in Abhängigkeit vom Prozentsatz $x$ . . . . .	64
4.2.	Erwarteter Transfer in den Szenarien „Winner Tax“ und „Loser Bonus“ für Spiel 9 (S. 65), in Abhängigkeit vom Prozentsatz $x$ . . . . .	65
4.3.	Ergebnisse des Experiments 1(a) für zufällige <b>symmetrische</b> $4 \times 4$ - Spiele: alle Test-Instanzen . . . . .	68
4.4.	Ergebnisse des Experiments 1(a) für zufällige <b>symmetrische</b> $5 \times 5$ - Spiele: alle Test-Instanzen . . . . .	69
4.5.	Ergebnisse des Experiments 1(b) für zufällige <b>faire</b> $4 \times 4$ - Spiele: alle Test-Instanzen . . . . .	71
4.6.	Ergebnisse des Experiments 1(b) für zufällige <b>faire</b> $5 \times 5$ - Spiele: alle Test-Instanzen . . . . .	71
A.1.	Ergebnisse des Experiments (S. 44) für <b>zufällige</b> $2 \times 2$ - Spiele: nur Instanzen mit $ \text{supp}(\bar{p})  =  \text{supp}(\bar{q})  = 1$ . . . . .	82
A.2.	Ergebnisse des Experiments (S. 44) für <b>zufällige</b> $2 \times 2$ - Spiele: nur Instanzen mit $ \text{supp}(\bar{p})  =  \text{supp}(\bar{q})  = 2$ . . . . .	82
A.3.	Ergebnisse des Experiments 1(b) für zufällige <b>faire</b> $3 \times 3$ - Spiele: nur Instanzen mit $ \text{supp}(\bar{p})  =  \text{supp}(\bar{q})  = 1$ . . . . .	88



A.4.	Ergebnisse des Experiments 1(b) für zufällige <b>faire</b> $3 \times 3$ - Spiele: nur Instanzen mit $ \text{supp}(\bar{p})  =  \text{supp}(\bar{q})  = 2$ . . . . .	88
A.5.	Ergebnisse des Experiments 1(b) für zufällige <b>faire</b> $3 \times 3$ - Spiele: nur Instanzen mit $ \text{supp}(\bar{p})  =  \text{supp}(\bar{q})  = 3$ . . . . .	88
A.6.	Ergebnisse des Experiments 1(c) für <b>zufällige</b> $3 \times 3$ - Spiele: nur Instanzen mit $ \text{supp}(\bar{p})  =  \text{supp}(\bar{q})  = 1$ . . . . .	90
A.7.	Ergebnisse des Experiments 1(c) für <b>zufällige</b> $3 \times 3$ - Spiele: nur Instanzen mit $ \text{supp}(\bar{p})  =  \text{supp}(\bar{q})  = 2$ . . . . .	90
A.8.	Ergebnisse des Experiments 1(c) für <b>zufällige</b> $3 \times 3$ - Spiele: nur Instanzen mit $ \text{supp}(\bar{p})  =  \text{supp}(\bar{q})  = 3$ . . . . .	90
A.9.	Ergebnisse des Experiments 1(a) für zufällige <b>symmetrische</b> $4 \times 4$ - Spiele: nur Instanzen mit $ \text{supp}(\bar{p})  =  \text{supp}(\bar{q})  = 1$ . . . . .	94
A.10.	Ergebnisse des Experiments 1(a) für zufällige <b>symmetrische</b> $4 \times 4$ - Spiele: nur Instanzen mit $ \text{supp}(\bar{p})  =  \text{supp}(\bar{q})  = 3$ . . . . .	94
A.11.	Ergebnisse des Experiments 1(b) für zufällige <b>faire</b> $4 \times 4$ - Spiele: nur Instanzen mit $ \text{supp}(\bar{p})  =  \text{supp}(\bar{q})  = 1$ . . . . .	97
A.12.	Ergebnisse des Experiments 1(b) für zufällige <b>faire</b> $4 \times 4$ - Spiele: nur Instanzen mit $ \text{supp}(\bar{p})  =  \text{supp}(\bar{q})  = 2$ . . . . .	97
A.13.	Ergebnisse des Experiments 1(b) für zufällige <b>faire</b> $4 \times 4$ - Spiele: nur Instanzen mit $ \text{supp}(\bar{p})  =  \text{supp}(\bar{q})  = 3$ . . . . .	98
A.14.	Ergebnisse des Experiments 1(b) für zufällige <b>faire</b> $4 \times 4$ - Spiele: nur Instanzen mit $ \text{supp}(\bar{p})  =  \text{supp}(\bar{q})  = 4$ . . . . .	98

## Literaturverzeichnis

- [AB 2012] I. Althöfer, M. Bärthel: *Taxed Matrix Games and Changes in the Expected Transfer*, 2012
- [Alt 2011] I. Althöfer: Vortrag im Oberseminar Mathematische Optimierung, FSU Jena, 6. Mai 2011
- [ARSS 2009] D. Avis, G. D. Rosenberg, R. Savani, B. von Stengel: *Enumeration of Nash equilibria for two-player games*, Economic Theory 42, 9-37, 2009
- [Bar 2008] E. N. Barron: *Game Theory, An Introduction*, Wiley, Chicago 2008
- [Bor 1921] É. Borel: *La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique gauche*, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, 173, S. 1304-1308, 1921
- [DK 1991] J. Dickhaut, T. Kaplan: *A program for finding Nash equilibria*, The Mathematica Journal 1(4), 87-93, 1991
- [EK 2010] D. Easley, J. Kleinberg: *Networks, Crowds, and Markets: Reasoning about a Highly Connected World*, Cambridge University Press, 2010
- [HHKS 2010] M. Hanke, J. Huber, M. Kirchler, M. Sutter: *The economic consequences of a Tobin tax - An experimental analysis*, Journal of Economic Behavior & Organization 74, 58-71, 2010
- [HI 2009] M. J. Holler, G. Illing: *Einführung in die Spieltheorie*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2009
- [HK 2001] K. Habermeier, A. Kirilenko: *Securities Transaction Taxes and Financial Markets*, International Monetary Fund WP/01/51, 2001
- [Kap 1945] I. Kaplansky: *A contribution to von Neumann's theory of games*, Ann. of Math. (2) 46, 474-479, 1945
- [Kar 1959] S. Karlin: *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics*, Reading, Mass., Addison-Wesley Publ. Co., 1959
- [LH 1964] C. E. Lemke, J. T. Howson: *Equilibrium points of bimatrix games*, Journal of the Society of Industrial and Applied Mathematics 12, 413-423, 1964

- [Nas 1951] J. Nash: *Noncooperative Games*, Ann. of Math. 54, 286-295, 1951
- [Neu 1928] J. von Neumann: *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*, Ann. of Math. 100, 295-320, 1928
- [Neu 1951] J. von Neumann: *Various techniques used in connection with random digits*, Monte Carlo Method, Nat. Bureau of Standards Applied Mathematics Ser. 12, 36-38, 1951
- [NM 1944] J. von Neumann, O. Morgenstern: *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, 1944
- [Rie 2010] C. Rieck: *Spieltheorie - Eine Einführung*, Christian Rieck Verlag, Eschborn 2010
- [Sch 2004] W. Schlee: *Einführung in die Spieltheorie*, Vieweg Verlag, Wiesbaden 2004
- [SF 1983] J. Szép, F. Forgó: *Einführung in die Spieltheorie*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1983
- [Ste 1999] B. von Stengel: *New maximal numbers of equilibria in bimatrix games*, Discrete Comput. Geom. 21, 557-568, 1999
- [The 2005] T. Theobald: *Geometrie und Kombinatorik von Nash-Gleichgewichten*, Math. Semesterberichte 52, 221-239, 2005
- [Uml 1993] S. R. Umlauf: *Transaction Taxes and the Behavior of the Swedish Stock Market*, Journal of Financial Economics 33, 227-240, 1993
- [WC 2007] S. Waner, S. R. Costenoble: *Finite Mathematics*, Brooks/Cole, Boston 2007

## Danksagung

Ein besonderer Dank gebührt Professor Ingo Althöfer, für die außergewöhnlich gute Betreuung und Unterstützung während der Entstehung dieser Diplomarbeit. Seine zahlreichen kreativen Ideen, Tipps und Kommentare boten stets eine enorme Hilfe.

Ich danke Rahul Savani für die Hinweise zur Programmierung eines geeigneten Algorithmus zum Auffinden von Nash-Gleichgewichten. Seine frei verfügbare Anwendungs-Software im Internet (<http://banach.lse.ac.uk/form.html>) ist ein sehr gutes Hilfs- und Testwerkzeug.

Chrilly Donninger, Prof. Stefanie Hiss und Prof. Oliver Kirchkamp danke ich für die Ideen zur praktischen Bedeutung der theoretischen Ergebnisse aus dieser Diplomarbeit.

Weiterhin danke ich meinen Kommilitonen für deren Bereitschaft zur Diskussion sowie deren fachliche Anmerkungen, die es erleichterten, das inhaltliche Konzept dieser Diplomarbeit klarer zu gestalten.

Ein weiterer Dank richtet sich an alle Probeleser, durch deren Hilfe einerseits zahlreiche Fehler verbessert und andererseits unverständliche Passagen abgeändert werden konnten. In diesem Zusammenhang danke ich besonders Kerstin Bärthel, Konrad Kaffka, Therese Klarner, Steven Klaus, Katharina Mielke und Christopher Schneider.

Nicht zuletzt möchte ich mich bei meinen Eltern bedanken, ohne deren Unterstützung mein Studium überhaupt nicht möglich gewesen wäre.

# **Selbstständigkeitserklärung**

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Jena, 14. Februar 2012, Marlis Bärthel